LST-A S1 MIMP, PC et SPI – Option d'Astronomie

Compléments de cours sur le mouvement des planètes et des satellites des planètes

- **Loi de Newton et mouvement de deux corps**

  La loi de Newton s'énonce "Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 s'attirent proportionnellement à leurs masses et à l'inverse du carré de leur distance $||\overrightarrow{P_1P_2}||$". La force exercée par P_1 sur P_2 est opposée à celle exercée par P_2 sur P_1:

$$\overrightarrow{F(P_1/P_2)} = -G\, m_1 m_2 \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{||\overrightarrow{P_1P_2}||^3} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F(P_2/P_1)} = -\overrightarrow{F(P_1/P_2)}$$

  où G est la constante de la gravitation universelle ($G = 6.672\ 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}).

  On peut montrer que la loi de Newton s'écrit exactement de la même manière pour des masses non ponctuelles à condition que chaque masse soit formée de couches homogènes sphériques de centre P_1 pour la masse totale m_1 et de centre P_2 pour la masse totale m_2. Le Soleil et les planètes ayant des formes quasi-sphériques, on peut les assimiler à des masses ponctuelles pour leur appliquer la loi de Newton.

  On considère que le Soleil a une masse prépondérante sur celle de chacune des planètes, et qu'en conséquence chaque planète est essentiellement attirée par le Soleil selon la loi de Newton; l'influence des autres planètes sur celle-ci ne donne lieu qu'à de très petites perturbations du mouvement principal qui est dû au Soleil. On peut dire de même qu'à l'intérieur d'une zone quasi-sphérique entourant chaque planète, ses satellites ne subissent essentiellement que l'attraction gravitationnelle de celle-ci. On peut donc considérer qu'avec une très bonne approximation, le système solaire peut être décrit comme un ensemble superposé de mouvements de deux corps (le Soleil et chacune de ses planètes, ou une planète et chacun de ses satellites).

- **Réduction des mouvements de deux corps à un problème de 1 corps**

  Soit R_0 un repère absolu d'origine O_0. On considère, dans ce repère, deux masses ponctuelles (m_1, P_1) et (m_2, P_2) soumises uniquement à leur attraction gravitationnelle mutuelle selon la loi de Newton. Les mouvements de P_1 et de P_2 sont donnés par 2 équations vectorielles traduisant l'égalité de la quantité d'accélération de chaque corps dans R_0 et de la force qu'il subit :

$$m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{O_0P_1}}{dt^2} = -G\, m_1 m_2 \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{||\overrightarrow{P_1P_2}||^3} \tag{1}$$

$$m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{O_0P_2}}{dt^2} = +G\, m_1 m_2 \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{||\overrightarrow{P_1P_2}||^3} \tag{2}$$

  L'addition membre à membre de ces 2 équations donne évidemment :

$$m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{O_0P_1}}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{O_0P_2}}{dt^2} = 0 \quad \text{soit encore} \quad \frac{d^2}{dt^2}(m_1\, \overrightarrow{O_0P_1} + m_2\, \overrightarrow{O_0P_2}) = 0 \tag{3}$$

  Or, si $\mathcal{G}$ désigne le barycentre ou centre de masse des deux points, c'est-à-dire le point tel que, quelque soit le point A, on ait :

$$m_1\, \overrightarrow{AP_1} + m_2\, \overrightarrow{AP_2} = (m_1 + m_2)\, \overrightarrow{A\mathcal{G}} \tag{4}$$

alors, en remplaçant A par O_0 dans (4), l'équation (3) devient :

$$\frac{d^2}{dt^2}((m_1 + m_2)\overrightarrow{O_0\mathcal{G}}) = 0$$

L'accélération de $\mathcal{G}$ dans le repère R_0 est donc nulle, et le mouvement de $\mathcal{G}$ dans ce repère est ainsi rectiligne et uniforme (vecteur vitesse constant et mouvement uniforme sur la droite support de ce vecteur vitesse). Les équations (1) et (2) peuvent alors être aussi transformées en y remplaçant simplement l'origine O_0 par le centre de masse $\mathcal{G}$, transformant le mouvement dans le repère absolu R_0 en un mouvement dans le repère R_g d'origine $\mathcal{G}$ (repère qualifié alors de **repère barycentrique**).

Après simplification de chaque équation (1) et (2) par la masse qu'on peut y mettre en facteur, leur soustraction membre à membre conduit à l'équation suivante qui traduit le **mouvement relatif de P_2 par rapport à P_1** :

$$\frac{d^2\,\overrightarrow{P_1P_2}}{dt^2} = -G\,(m_1 + m_2)\,\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{||\overrightarrow{P_1P_2}||^3} \tag{5}$$

L'équation (4) peut encore se transformer en :

$$m_1\,\overrightarrow{\mathcal{G}P_1} + m_2\,\overrightarrow{\mathcal{G}P_2} = 0 \quad \text{puis en} \quad \overrightarrow{P_1P_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\,\overrightarrow{\mathcal{G}P_2} = -\frac{m_1 + m_2}{m_2}\,\overrightarrow{\mathcal{G}P_1} \tag{6}$$

On déduit de (5) et (6) les équations du mouvement de P_1 et P_2 par rapport à $\mathcal{G}$, c'est-à dire celles du **mouvement barycentrique** de ces points :

$$\frac{d^2\overrightarrow{\mathcal{G}P_1}}{dt^2} = -G\,\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}\,\frac{\overrightarrow{\mathcal{G}P_1}}{||\overrightarrow{\mathcal{G}P_1}||^3} \tag{7}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{\mathcal{G}P_2}}{dt^2} = -G\,\frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}\,\frac{\overrightarrow{\mathcal{G}P_2}}{||\overrightarrow{\mathcal{G}P_2}||^3} \tag{8}$$

Les équations (5), (7) et (8) représentent chacune le mouvement d'un seul point (P_1 ou P_2) par rapport à un autre point (P_1 ou $\mathcal{G}$). On a ainsi réduit le problème du mouvement de deux corps à celui d'un seul corps, sachant que le mouvement de l'autre corps s'en déduit par homothétie.

- **Le mouvement képlérien**

Les équations (5), (7) et (8) ont la même forme. On peut les résoudre en ne considérant que l'une d'entre elles. Pour alléger les notations, on représente donc ces équations par une équation unique correspondant au mouvement d'un point P par rapport à un point O, qu'on écrit:

$$\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2} = -\mu\,\frac{\overrightarrow{OP}}{||\overrightarrow{OP}||^3} \tag{9}$$

où μ est appelée **masse réduite** (remplaçant par exemple $G(m_1{+}m_2)$ dans le cas du mouvement relatif de P_2 par rapport à P_1, ou remplaçant l'une des fonctions compliquées des masses dans le cas des mouvements barycentriques)

On allège encore l'écriture en posant

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r\,\vec{u} \tag{10}$$

où r est la norme de $\vec{r}$ et $\vec{u}$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OP}$ On pourra donc écrire

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\,\vec{u} \tag{11}$$

Cette équation représente ce qu'on appelle un **mouvement képlérien de centre** O, c'est-à-dire qu'elle décrit le mouvement du point P dans un repère fixe d'origine O selon une **accélération centrale newtonienne** en $-\mu/r^2$ (l'accélération de P dans le repère fixe d'origine O est qualifiée de "centrale" car ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{OP}$).
On obtient la vitesse et l'accélération de P en dérivant 2 fois l'expression (10) :

$$\overrightarrow{V(P)} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\vec{u} + r\,\frac{d\vec{u}}{dt} \tag{12}$$

et

$$\overrightarrow{\Gamma(P)} = \frac{d\overrightarrow{V(P)}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\,\vec{u} + 2\frac{dr}{dt}\,\frac{d\vec{u}}{dt} + r\,\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}$$

par dérivation de l'identité $\vec{u}.\vec{u} = 1$ on obtient en outre :

$$\vec{u}.\frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \tag{13}$$

A partir de l'équation (9) ou (11), on se propose de démontrer les 3 lois que Kepler a énoncées à propos du mouvement des planètes :

1. Les orbites décrites par les planètes sont planes et décrites selon la loi des aires.
2. Ces orbites sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers.
3. Deux planètes quelconques dont les orbites ont des demi-grands axes a et a', sont parcourues en des périodes respectives T et T', vérifiant la relation :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2}$$

En fait, on verra dans la suite que la solution de l'équation (9) ou (11) ou mouvement képlérien de P, s'effectue plus généralement sur une conique (ellipse, hyperbole ou parabole) dont un des foyers est situé en O.

1. *Mouvement plan et et loi des aires*

   On a besoin pour cela de la notion de moment d'un vecteur : Le moment en un point O d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ lié à un point P est le vecteur $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{V}$ (produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{V}$) qui possède les propriétés suivantes:

   (a) $\overrightarrow{W}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OP}$ et à $\overrightarrow{V}$ (donc orthogonal au plan contenant ces deux vecteurs)

   (b) Sa norme $||\overrightarrow{W}||$ vaut $||\overrightarrow{OP}|| \times ||\overrightarrow{V}|| \sin(\beta)$ ou β désigne l'angle entre $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{V}$ (donc $\overrightarrow{W} = 0$ si $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires).
   La valeur de cette norme représente évidemment l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{V}$.
   On peut aussi appliquer le produit vectoriel à des vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ quelconques, et on pourrait établir ces propriétés supplémentaires:

(c) Le produit vectoriel est un opérateur linéaire par rapport à chacun des deux vecteurs.

(d) Le résultat d'un produit vectoriel change de signe si on permute les deux vecteurs : $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = -\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_1}$

(e) Un produit vectoriel $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ est nul si les deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont parallèles.

(f) Les vecteurs de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'une base orthonormée directe vérifient les relations:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad , \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

En multipliant vectoriellement les deux membres de l'équation (9) par $\overrightarrow{OP}$ on obtient:

$$\overrightarrow{OP} \wedge \frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2} = \overrightarrow{OP} \wedge \frac{-\mu}{||\overrightarrow{OP}||^3}\,\overrightarrow{OP}$$

Le second membre de cette expression est nul (vecteurs colinéaires) et comme le premier membre est aussi la dérivée par rapport au temps de $\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{V(P)}$, on a donc:

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{V(P)}) = 0 \quad \text{qui s'intègre en} \quad \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{V(P)} = \overrightarrow{C} \tag{14}$$

où $\overrightarrow{C}$ est un vecteur constant. Ceci veut dire que si, à l'instant initial, le point P est en P_0 avec la vitesse $\overrightarrow{V_0}$, on peut calculer $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{OP_0} \wedge \overrightarrow{V_0}$ et ensuite, le mouvement se poursuit de telle manière que (14) soit vérifiée avec cette valeur de $\overrightarrow{C}$.
Donc le vecteur $\overrightarrow{OP}$ reste quelque soit t orthogonal à ce vecteur constant. La trajectoire de P est ainsi confinée dans le plan passant par O et orthogonal à $\overrightarrow{C}$: **La trajectoire de P est plane**.
Notons $\overrightarrow{C} = C\,\vec{k}$, où $\vec{k}$ est le vecteur unitaire de la normale à ce plan. La valeur de C représente l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{V(P)}$. Plus précisément, si on désigne par $\overrightarrow{PP'}$ le vecteur déplacement de P à P' pendant le temps Δt:

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{V(P)}\,\Delta t$$

on a alors aussi :

$$||\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{PP'}|| = C\,\Delta t$$

Le membre de gauche représente l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs, c'est-à-dire aussi 2 fois l'aire du triangle OPP'. En appelant ΔS l'aire de ce triangle, on a donc:

$$2\,\Delta S = C\,\Delta t$$

En faisant tendre Δt vers zéro, on abouti à **la loi des aires** :

$$2\,\frac{dS}{dt} = C$$

soit encore, en intégrant entre deux instants quelconques t_1 et t_2 :

$$2\int_{t_1}^{t_2} dS = C\,(t_2 - t_1) \quad \text{ou} \quad 2\,(S(t_2) - S(t1)) = C\,(t_2 - t_1) \tag{15}$$

qu'on explicite encore en disant que l'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OP}$ est proportionnelle au temps mis pour parcourir cette aire.

Dans le plan du mouvement (orthogonal à $\vec{k}$), soit $R = O\vec{i}\vec{j}$ un repère orthonormé, on peut repérer le point P par des coordonnées x et y dans R : ($\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$), ou par des coordonnées polaires r et θ telles que l'on ait $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On peut alors tirer de l'équation (10) :

$$\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}}{dt} = (-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})\frac{d\theta}{dt} = \vec{v}\,\frac{d\theta}{dt} \tag{16}$$

où $\vec{v}$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ (qu'on peut déduire de $\vec{u}$ par une rotation de $+\pi/2$ dans le plan du mouvement), puis, de l'équation (12) :

$$\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{V(P)} = (r^2\,\frac{d\theta}{dt})\,\vec{k} = C\,\vec{k} \quad \text{d'où} \quad C = r^2\,\frac{d\theta}{dt} \tag{17}$$

Cette dernière relation montre aussi que $\frac{d\theta}{dt}$ conserve le même signe quelque soit t (le mouvement de P s'effectue en tournant autour de O dans un seul sens, sans jamais revenir en arrière).

2. *Les trajectoires sont des coniques de foyer O*

Une des définitions des coniques est la suivante : Soient un point O et une droite D, et (Π) le plan contenant O et D. L'ensemble des points M de ce plan tels que le rapport des distances de M à O et à D est une constante $e > 0$, est une conique de **foyer** O et d'**excentricité** e; la droite D est appelée **directrice** de la conique. En appelant H le point de D où se projette M (projection orthogonale), on a donc

$$\frac{MO}{MH} = e$$

En appelant r la distance OM, on a alors $MH = r/e$. Notons alors H_0 la projection de O sur D, puis d la distance OH_0 et enfin α l'angle entre OH_0 et OM; en projetant M sur OH_0 on obtient la relation: $d = r\cos\alpha + r/e$ soit encore :

$$r = \frac{ed}{1 + e\,\cos\alpha} = \frac{p}{1 + e\,\cos\alpha} \quad \text{avec} \quad p = ed \tag{18}$$

Ceci est l'équation polaire d'une conique de foyer O, d'excentricité e et de **paramètre** p (ou de directrice D). On voit par ailleurs que p représente aussi la distance r lorsque α vaut $\pi/2$.
Le point P_0 de la conique la plus proche de O correspond à $\alpha = 0$; c'est le **péricentre** de la conique, et l'axe OP_0 est le **grand axe** de cette conique. La distance OP_0 vaut $q = p/(1+e)$. Ainsi, on voit que α représente aussi l'angle que fait le rayon vecteur OM avec la direction du péricentre.

On distingue 3 cas :

(a) Dans le cas $e < 1$, la distance r reste finie pour toutes les valeurs de α, La distance de M à O passe par un maximum au point A_0 (apocentre) pour $\alpha = \pi$, correspondant à la distance $q' = p/(1-e)$; la conique est alors une ellipse de foyer O et d'excentricité e et de grand axe $2a = q + q' = p/(1+e) + p/(1-e)$. De cette dernière expression, on tire encore

$$p = a(1-e^2) \quad \text{puis} \quad q = a(1-e) \quad \text{et} \quad q' = a(1+e)$$

a est le **demi-grand axe** de l'ellipse. Le centre C de l'ellipse est le milieu du segment A_0P_0 et on a $CO = CP_0 - OP_0 = a - q = a\,e$. Le deuxième foyer de l'ellipse est le point O' symétrique de O par rapport à C. Le **petit axe** de l'ellipse est le segment orthogonal au grand axe au point C. Le demi-petit axe a pour longueur b :

$$b = a\,\sqrt{1 - e^2}$$

On trouve cette valeur en utilisant une autre propriété des ellipses, celle d'être l'ensemble des points M tels que la somme des distances de M aux deux foyers est une constante égale à $2a$. Sur le petit axe, le point M est équidistant des deux foyers et donc en ce point on a $OM = a$, puis on peut calculer $b = CM$ dans le triangle MCO rectangle en C.
L'équation polaire des ellipses est ainsi:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\,\cos\alpha} \tag{19}$$

On pourrait aussi montrer que dans un repère $C\vec{i_0}\vec{j_0}$ du plan (Π) d'origine C et dont l'axe $C\vec{i_0}$ est suivant le grand axe de l'ellipse, les coordonnées x et y du point M de l'ellipse vérifient l'équation cartésienne:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{20}$$

où b est le demi-petit axe, de longueur $b = a\,\sqrt{1 - e^2}$. Il suffit pour cela d'éliminer α entre les deux équations : $x = ae + r\,\cos\alpha$ et $y = r\,\sin\alpha$ après y avoir remplacé r par l'expression (19).
Même si la définition qu'on a prise pour les coniques ne convient pas au cas $e = 0$, l'équation (19) représente quand même un cercle lorsqu'on y fait $e = 0$. Ce cercle de rayon a est un cas limite des ellipses lorsqu'on fait tendre leurs deux foyers vers le centre C.

(b) Dans le cas $e > 1$, la distance r devient infinie lorsque $\alpha = \alpha_0 = \arccos(-1/e)$. Les deux directions α_0 et $-\alpha_0$ sont celles de 2 asymptotes; la conique est alors l'une des deux branches de l'hyperbole de foyer O et d'excentricité e (branche correspondant à $r > 0$). Lorsque α est compris entre α_0 et $2\pi - \alpha_0$, la distance r devient négative; on peut lui faire correspondre une position M' sur l'autre branche d'hyperbole (M' est à la distance $|r|$ de O dans la direction $\alpha + \pi$). On peut ainsi considérer la position $\alpha = \pi$ comme un extrémum de $|r|$ associé à une position A_0 distante de O de la valeur $q' = |p/(1-e)|$ et située sur le grand axe OP_0 du même côté de O que P_0. La distance entre P_0 et A_0 est encore notée $2a$ et vaut cette fois la différence $OA_0 - OP_0$, soit $p/(e - 1) - p/(1 + e)$, d'où l'on tire finalement :

$$p = a(e^2 - 1) \quad \text{puis} \quad q = a(e - 1) \quad \text{et} \quad q' = a(1 + e)$$

Le centre C de l'hyperbole est le milieu du segment A_0P_0 et on a $CO = CP_0 + P_0O = a + q = a\,e$. Les asymptotes sont les droites issues de C et inclinées de $\pm\alpha_0$ sur le grand axe. Le deuxième foyer de l'ellipse est le point O' symétrique de O par rapport à C. L'équation polaire des hyperboles est ainsi:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e\,\cos\alpha} \tag{21}$$

On pourrait montrer que dans un repère $C\vec{i}_0\vec{j}_0$ du plan (Π) d'origine C et dont l'axe $C\vec{i}_0$ est suivant le grand axe de l'hyperbole, les coordonnées x et y du point M de l'hyperbole vérifient l'équation cartésienne:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{22}$$

où b est la distance des asymptotes à l'un des foyers, valant $b = a\sqrt{e^2 - 1}$. Il suffit pour cela d'éliminer α entre les deux équations : $x = r\,\cos\alpha - ae$ et $y = r\,\sin\alpha$ après y avoir remplacé r par l'expression (21).

(c) Dans le cas $e = 1$, la distance r devient infinie lorsque $\alpha = \alpha_0 = \arccos(-1) = \pi$. La direction $\alpha_0 = \pi$ correspond à une distance infinie; la conique est une parabole de foyer O et de grand axe la droite joignant O au péricentre. L'équation polaire des paraboles est donc simplement:

$$r = \frac{p}{1 + \cos\alpha} \tag{23}$$

La distance au péricentre est évidemment $q = p/2$.

Il reste à montrer maintenant que l'équation (11) du mouvement képlérien est satisfaite par la relation (18), équation polaire des coniques.

L'équation vectorielle (11) se décompose en deux équations scalaires en la projetant sur un certain système d'axes orthonormés $O\vec{i}\vec{j}$ d'origine O dans le plan du mouvement : Le point P y a en effet des coordonnées cartésiennes X et Y ou des coordonnées polaires r et θ avec $X = r\,\cos\theta$ et $Y = r\,\sin\theta$ (le vecteur unitaire $\vec{u}$ a bien sûr pour composantes $\cos\theta$ et $\sin\theta$). Les équations s'écrivent dans ces axes :

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\,\cos\theta \quad \text{et} \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\,\sin\theta \tag{24}$$

On calcule d'abord $\frac{dX}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\cos\theta - r\,\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}$ et on y remplace r par $p/(1 + e\,\cos\alpha)$

Pour que cette équation corresponde à une conique dont le grand axe soit dans une direction quelconque θ_0 on relie θ à α par $\theta = \theta_0 + \alpha$ (à θ_0 correspond un vecteur unitaire $\vec{u}_0$ de composantes $\cos\theta_0$ et $\sin\theta_0$). On obtient :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{r^2}{p}\,(e\sin\alpha\cos\theta\,\frac{d\alpha}{dt} - e\cos\alpha\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} - \sin\theta\,\frac{d\theta}{dt})$$

Avec $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$, on peut simplifier $\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta$ en $-\sin\theta_0$ et il reste :

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{r^2}{p}\,(e\sin\theta_0 + \sin\theta)\,\frac{d\theta}{dt}$$

Mais le mouvement devant suivre la loi des aires, on a aussi $r^2\,\frac{d\theta}{dt} = C$ de sorte qu'on a:

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{C}{p}\,\sin\theta - \frac{Ce}{p}\,\sin\theta_0 \tag{24a}$$

En dérivant une deuxième fois, il reste : $\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{C}{p}\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}$ et finalement, en remplaçant $\frac{d\theta}{dt}$ par C/r^2, on trouve :

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{C^2}{pr^2}\cos\theta$$

On obtiendrait de la même façon :

$$\frac{dY}{dt} = \frac{C}{p}\cos\theta + \frac{Ce}{p}\cos\theta_0 \tag{24b}$$

puis :

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -\frac{C^2}{pr^2}\sin\theta$$

En comparant avec les expressions (24), on voit que le mouvement képlérien se fait sur la conique (18) à condition qu'on ait :

$$\frac{C^2}{p} = \mu \quad \text{d'où cette autre expression de } p : \quad p = \frac{C^2}{\mu}$$

Pour une constante d'attraction μ et une constante des aires C, le **mouvement képlérien s'effectue donc sur la conique** d'équation polaire :

$$r = \frac{C^2/\mu}{1 + e\,\cos(\theta - \theta_0)} \tag{25}$$

où θ_0 est la direction du péricentre.

Les expressions (24a) et (24b) sont par ailleurs les composantes de la vitesse, qu'on peut rassembler pour écrire :

$$\overrightarrow{V(P)} = \frac{C}{p}\,(\vec{v} + e\vec{v}_0) \tag{25a}$$

où $\vec{v}$ et $\vec{v}_0$ sont deux vecteurs unitaires faisant respectivemebnt les angles $\theta+\pi/2$ et $\theta_0+\pi/2$ avec l'axe $O\vec{i}$; ils sont donc simplement des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ et $\vec{u}_0$ respectivement (on pourrait écrire plus précisément: $\vec{v} = \vec{k}\wedge\vec{u}$ et $\vec{v}_0 = \vec{k}\wedge\vec{u}_0$). L'ensemble des points Q tels que $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{V(P)}$ s'appelle **hodographe** du mouvement de P de pôle O. L'expression (25a) montre que l'hodographe du mouvement képlérien est un cercle de centre Q_0 et de rayon C/p, avec $\overrightarrow{OQ_0} = (C/p)\,e\vec{v}_0$.

3. *Les mouvements elliptiques suivent la troisième loi de Kepler*

Dans le cas du mouvement elliptique, le temps que met le point P pour revenir à son point de départ est la **période** T du mouvement.

La loi des aires (15) indique que l'aire balayée par le rayon vecteur sur un tour est égale à $\frac{1}{2}C\,T$ où C est la constante des aires. Or l'aire de l'ellipse ainsi balayée est égale à πab où a et b sont les demis axes de l'ellipse. Comme on a $p = a(1-e^2) = C^2/\mu$ et $b = a\sqrt{1-e^2}$, on peut écrire :

$$\pi\,a^2\sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2}\,T\,\sqrt{\mu a(1-e^2)}$$

d'où, en élevant au carré, on tire la **troisième loi de Kepler** :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} \quad \text{ou} \quad \omega^2 a^3 = \mu \tag{26}$$

où $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ est la **vitesse angulaire moyenne** sur un tour.
Dans le cas du mouvement d'une planète (de masse m) par rapport au Soleil (de masse $M_\odot$), on a $\mu = G(M_\odot + m)$. Si on néglige la masse des planètes devant celle du Soleil, entre deux planètes de demi-grands axes a et a', et de périodes respectives T et T' , on a la loi énoncée par Kepler:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2} = \mu = GM_\odot \tag{27}$$

4. *Energie des orbites képlériennes*

En faisant le produit scalaire des deux membres de l'équation (11) par la vitesse de P, tenant compte aussi de (12), on obtient :

$$\overrightarrow{V(P)}.\frac{d\overrightarrow{V(P)}}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\vec{u}.(\frac{dr}{dt}\,\vec{u} + r\,\frac{d\vec{u}}{dt})$$

Tenant compte de (13) et du fait que $\overrightarrow{V(P)}.\dfrac{d\overrightarrow{V(P)}}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}(\,\overrightarrow{V(P)}\,.\,\overrightarrow{V(P)}\,)$, il reste l'équation :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V(P)}.\overrightarrow{V(P)}) = -\frac{\mu}{r^2}\,\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{\mu}{r})$$

d'où, par intégration :

$$||\overrightarrow{V(P)}||^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h \tag{28}$$

où h est une constante calculable à l'instant initial à partir de la distance r et la vitesse $\overrightarrow{V(P)}$ à cet instant.
On voit immédiatement que si h est positif ou nul, la vitesse est réelle et calculable lorsque $r = \infty$, tandis que pour $h < 0$ une valeur infinie pour r donnerait une vitesse imaginaire pure. Dans ce dernier cas, le mouvement est donc borné et correspond aux trajectoires elliptiques; les cas $h > 0$ et $h = 0$ correspondent respectivement aux orbites hyperboliques et paraboliques.
La constante h peut d'ailleurs être évaluée en fonction des constantes C et p introduites précédemment. En effet, on peut voir d'après (12) que lorsque $\dfrac{dr}{dt} = 0$ (par exemple quand $r = q$ au péricentre P_0), le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(P_0)}$ est orthogonal au rayon vecteur $\overrightarrow{OP_0}$, et on peut y appliquer la loi des aires (17), ce qui donne :

$$V(P_0) = q\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{q}$$

Donc, en calculant (28) au péricentre et avec $C^2 = \mu p$, on obtient :

$$2h = \frac{C^2}{q^2} - \frac{2\mu}{q} = \mu\,(\frac{p}{q^2} - \frac{2}{q}) = \frac{\mu}{p}\,(e^2 - 1) = \frac{\mu}{q}\,(e-1) \tag{28a}$$

On calcule facilement la valeur de h dans les 3 types de coniques (grâce aux valeurs de p et q correspondantes):

(a) Dans le **cas elliptique**, $p = a(1-e^2)$ et $q = a(1-e)$. On en déduit : $2h = -\frac{\mu}{a}$
On trouve aussi le cas particulier ($e = 0$) du mouvement circulaire de rayon r où $a = r \;\; \forall t$ d'où l'on tire la **vitesse circulaire** à la distance r :

$$V_c(r) = \sqrt{\mu/r} \tag{29}$$

Mais pour que l'orbite soit vraiment circulaire, il faut en outre que le vecteur vitesse soit orthogonal au rayon. Dans le cas elliptique, lorsque $r = a$, le point P se trouve sur le petit axe de l'ellipse et sa vitesse est tangente à l'ellipse en ce point, et donc parallèle au grand axe; en ce point, la vitesse vaut $V_c(a) = \sqrt{\mu/a} = -2h$ et l'angle que fait cette vitesse avec le rayon vecteur vaut $\arccos(-e)$

(b) Dans le **cas parabolique**, $q = p/2$. On en déduit : $2h = 0$
La vitesse s'annulle à l'infini. Le corps peut s'échapper à l'infini mais il y arrive avec une vitesse nulle; il suffit qu'il ait, à la distance r, la **vitesse parabolique** :

$$V_p(r) = \sqrt{2\mu/r} = \sqrt{2}\, V_c(r) \tag{30}$$

Cette vitesse par et C la constante des airesabolique est encore appelée **vitesse de libération** à la distance r.

(c) Dans le **cas hyperbolique**, $p = a(e^2-1)$ et $q = a(e-1)$. On en déduit : $2h = +\frac{\mu}{a}$
$2h$ représente aussi V_∞^2 (carré de la vitesse à l'infini, sur les asymptotes): Le point P arrive à l'infini avec une vitesse non nulle. Il parcourt l'une des 2 branches de l'hyperbole, venant de l'infini par l'une des asymptotes et retournant à l'infini par l'autre asymptote; en contournant ainsi le foyer O son vecteur vitesse subit une **déviation** δ égale à l'angle des 2 asymptotes orientées dans le sens du mouvement; si θ_∞ désigne la valeur de θ lorsque P tend vers l'infini ($\cos\theta_\infty = -1/e$), on a :

$$\delta = \pi - 2(\pi - \theta_\infty) \quad \text{, d'où:} \quad \sin(\delta/2) = 1/e$$

On peut montrer, en tirant e de (28a), que la déviation peut s'exprimer en fonction de la vitesse à l'infini et en fonction, soit de q (distance minimum d'approche du foyer O), soit de b (distance des asymptotes au foyer), par les expressions :

$$\sin(\delta/2) = \frac{1}{1 + q\,V_\infty^2/\mu} \quad \text{ou} \quad \sin^2(\delta/2) = \frac{1}{1 + b^2 V_\infty^4/\mu^2} \tag{31}$$

5. *Loi du mouvement sur la conique*

(Cette partie, plus complexe et non exposée en cours, est donnée à titre indicatif)
Pour obtenir la loi du mouvement sur la trajectoire, on pourrait intégrer la loi des aires mise par exemple sous la forme $C\,dt = r^2\,d\theta$, d'où :

$$C(t - t_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} r^2\,d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{p^2\,d\theta}{(1 + e\,\cos\theta)^2}$$

où θ_0 est la valeur de θ à l'instant t_0, mais cela n'aboutit pas à une relation simple entre θ et t. Il est plus simple de chercher une relarion entre r et t.
Pour cela il est préférable de partir des équations du mouvement écrites en coordonnées polaires :

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2 = -\mu/r^2 \qquad \text{et} \qquad (\frac{dr}{dt})^2 + r^2(\frac{d\theta}{dt})^2 = 2\mu/r + 2h$$

En éliminant $(\frac{d\theta}{dt})^2$ de ces 2 relations, on obtient :

$$r\,\frac{d^2r}{dt^2}+(\frac{dr}{dt})^2=\mu/r+2h$$

Puis on régularise cette équation en changeant de variable temporelle : $t\mapsto\eta$ par la relation

$$dt=r\,d\eta \tag{32}$$

soit encore $\frac{d}{d\eta}=r\,\frac{d}{dt}$.
On obtient alors l'équation suivante permettant de calculer facilement r en fonction de η :

$$\frac{d^2r}{d\eta^2}-2h\,r=\mu \tag{33}$$

On en déduit la solution $r(\eta)$ sous plusieurs formes (en fonction du signe de h) dépendant de 2 constantes d'intégration α_0 et β_0 :

(a) cas elliptique ($h<0$), solution en termes de fonctions trigonométriques :

$$r(\eta)=\alpha_0\,\cos(\eta\sqrt{-2h})+\beta_0\,\sin(\eta\sqrt{-2h})$$

(b) cas hyperbolique ($h>0$), solution en termes de fonctions hyperboliques :

$$r(\eta)=\alpha_0\,\cosh(\eta\sqrt{2h})+\beta_0\,\sinh(\eta\sqrt{2h})$$

(c) cas parabolique ($h=0$), solution polynomiale :

$$r(\eta)=\frac{1}{2}\,\mu\,\eta^2+\alpha_0\,\eta+\beta_0$$

En supposant $\eta=0$ à l'instant t_p du passage au péricentre, on déduit t en fonction de η à partir de (32) :

$$t-t_p=\int_0^\eta r(\eta)\,d\eta$$

Par exemple, pour le mouvement elliptique, on obtient :

$$t-t_p=\frac{1}{\sqrt{-2h}}\,(\alpha_0\,\sin(\eta\sqrt{-2h})+\beta_0\,(1-\cos(\eta\sqrt{-2h})))$$

Les constantes d'intégration α_0 et β_0 se déterminent sachant qu'à l'instant t_p on a

$$r(t_p)=q=p/(1+e)\quad\text{et}\quad\frac{dr}{d\eta}=r\,\frac{dr}{dt}(t_p)=0$$

On peut finalement résumer les résultats dans le formulaire suivant :

(a) Dans le **cas elliptique** $(h < 0)$, on a $-\mu/2h = a$; en posant :

$$E = \sqrt{-2h}\,\eta \quad , \quad \omega = \sqrt{-2h}/a = \sqrt{\mu/a^3} \quad \text{et} \quad M = \omega(t - t_p)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
r &= a(1 - e\,\cos E) = \frac{dt}{d\eta} = a\,\frac{dM}{dE} \quad \text{ou} \quad \frac{dE}{dt} = \frac{\omega\,a}{r} \\
M &= E - e\,\sin E \qquad\qquad \text{(équation de Kepler)} \\
r\,\cos\theta &= a\,(\cos E - e) \\
r\,\sin\theta &= = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E \\
\tan^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1+e}{1-e}\,\tan^2\frac{E}{2}
\end{aligned}$$

(b) Dans le **cas hyperbolique** $(h > 0)$, on a $\mu/2h = a$; en posant :

$$E = \sqrt{2h}\,\eta \quad , \quad \omega = \sqrt{2h}/a = \sqrt{\mu/a^3} \quad \text{et} \quad M = \omega(t - t_p)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
r &= a(e\,\cosh E - 1) = \frac{dt}{d\eta} = a\,\frac{dM}{dE} \quad \text{ou} \quad \frac{dE}{dt} = \frac{\omega\,a}{r} \\
M &= e\,\sinh E - E \qquad\qquad \text{(équation de Kepler)} \\
r\,\cos\theta &= a\,(e - \cosh E) \\
r\,\sin\theta &= a\sqrt{e^2-1}\,\sinh E \\
\tan^2\frac{\theta}{2} &= \frac{e+1}{e-1}\,\tanh^2\frac{E}{2}
\end{aligned}$$

(c) Dans le **cas parabolique** $(h = 0)$, en posant :

$$E = \sqrt{\mu/p}\,\eta \quad , \quad \omega = \sqrt{\mu/p^3} \quad \text{et} \quad M = \omega(t - t_p)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
r &= \frac{p}{2}(1 + E^2) = \frac{dt}{d\eta} = p\,\frac{dM}{dE} \quad \text{ou} \quad \frac{dE}{dt} = \frac{\omega\,p}{r} \\
M &= \frac{1}{2}\,E + \frac{1}{6}\,E^3 \\
r\,\cos\theta &= \frac{p}{2}\,(1 - E^2) \quad \text{et} \quad r\,\sin\theta = p\,E \quad \text{puis} \quad \tan\frac{\theta}{2} = E
\end{aligned}$$

On constate que dans tous les cas, on n'obtient jamais directement les coordonnées en fonction de t, mais c'est le temps (ou $M = \omega(t - t_0)$) qui se calcule à partir de E, lui-même obtenu à partir de r ou de θ. L'équation de Kepler qui permet de calculer E lorsque M est donné est une équation transcendante qui peut se résoudre numériquement ou, dans le cas elliptique, par des développements en série entière de l'excentricité lorsque celle ci est proche de zéro : On peut procéder par approximations successives à partir de $E_0 = M$ puis $E_{i+1} = M + e\sin(E_i)$ jusqu'à convergence à la précision souhaitée...

Quelques applications:

Dans la suite, pour les applications numériques relatives aux satellites artificiels de la Terre on pourra prendre $\mu = 3.986\,10^{14}$ m^{3}s^{-2}, et dans celles relatives à des sondes spatiales dans le système solaire, l'attraction du Soleil correspond à $\mu = 1.327\,10^{20}$ m^{3}s^{-2}.

– Calculer la vitesse circulaire pour un satellite de la Terre correspondant à $r = 7000$ km et à la distance r des satellites géostationnaires (de période 24h); même question pour une sonde spatiale à la distance de $150\,10^6$ km du Soleil.

– Déterminer l'expression de la vitesse au péricentre, à l'apocentre, ou sur le petit axe d'une orbite elliptique.

On veut envoyer un satellite de manière qu'il s'éloigne de la Terre sur une orbite hyperbolique telle que sa vitesse à l'infini soit 2 km/s, sachant qu'il se trouve au départ sur une orbite circulaire de 7000 km de rayon.

– Quel incrément de vitesse faut-il fournir au satellite pour transformer son orbite circulaire en cette orbite hyperbolique ?

– Quelle sera la déviation entre la vitesse initiale et la vitesse à l'infini ?