

Mécanique du Système Solaire

M316

Alain Vienne



LAL-IMCCE Laboratoire d'Astronomie de Lille
de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides
Lille 1 et Observatoire de Paris, UMR 8028 du CNRS.

19 février 2007

Mécanique du Système Solaire

Alain Vienne

19 février 2007

Table des matières

1	Repères et coordonnées en astronomie	5
1.1	Coordonnées locales	5
1.2	Coordonnées horaires	6
1.3	Coordonnées équatoriales	7
2	Formulation du problème des N-corps	9
2.1	Le problème des 2-corps	9
2.2	Energie et moment cinétique (2-corps)	12
2.3	Cas général ($N > 2$)	14
2.4	Réduction à (N-1) corps	16
2.5	Potentiel	17
3	Approches du problème des N-corps	19
3.1	Sphère d'influence	20
3.1.1	Cas d'un mouvement héliocentrique	22
3.1.2	Cas d'un mouvement planétocentrique	22
3.1.3	La "sphère"	23
3.2	Intégration numérique	25
3.2.1	Le problème de Cauchy	25
3.2.2	Recherche d'une solution discrète approchée	29
3.2.3	La méthode d'Euler	30
3.2.4	Consistance, stabilité et convergence	30
3.2.5	La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4	34
3.3	Approche statistique	35
3.3.1	Théorème du viriel et la relation masse-période-distance	35
3.3.2	Dynamique stellaire sans rencontre : Equations de Boltzmann	37

4	Le mouvement képlérien	41
4.1	Résolution du problème de Képler	41
4.2	Les 3 types de mouvements	43
4.3	Mouvement sur la trajectoire dans le cas elliptique	46
4.4	Mouvement sur la trajectoire dans le cas général	51
5	Éléments d'orbite et éphémérides	57
5.1	Les constantes d'intégration	57
5.2	Les éléments d'orbite	59
5.3	Unités utilisées en astronomie	59
5.4	Calcul d'éphémérides	61
5.5	Conclusion	68
6	Trajectoires des missions interplanétaires	71
6.1	Principe	71
6.2	La loi du choc	72
6.3	Les sondes spatiales	73
7	Détermination des éléments d'orbite	75
7.1	La méthode de Laplace	75
7.2	Calcul des éléments d'orbites	78
8	Positions d'équilibre	81
9	Représentation trigonométriques	83
10	Représentations autres	85

Chapitre 1

Repères et coordonnées en astronomie

A un lieu donné et à une date donnée, l'observateur n'a pas accès à la distance entre lui et l'objet céleste. Ainsi, cet observateur peut très bien considérer que tous ces objets sont à une même distance (arbitraire). De manière équivalente, on peut dire que l'observateur n'appréhende que les directions issues de sa position. Or l'ensemble de ces directions s'identifie à une sphère centrée sur ce point.

Sur la sphère céleste, on distingue la sphère locale et la sphère des fixes.

La sphère locale est liée au lieu géographique de l'observateur. Cela signifie que son horizon est "physiquement" un grand cercle de cette sphère.

La sphère des fixes est liée à la figure indéformable constituée par les images des étoiles sur la sphère céleste.

Ces deux sphères se superposent et l'un des buts de l'astrométrie est de décrire le mouvement de l'une par rapport à l'autre.

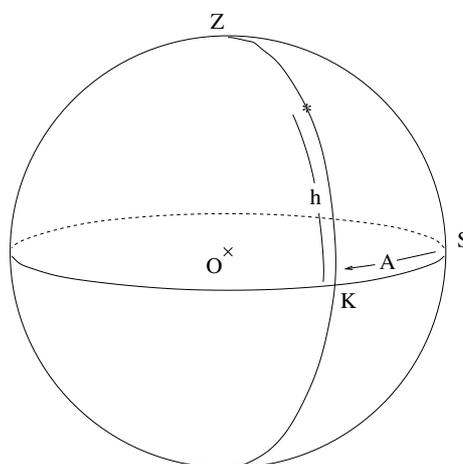
1.1 Coordonnées locales

Elles correspondent au repère naturel que nous utilisons dans la vie courante : l'horizon est un grand cercle et nous sommes au centre O de la sphère. On prend donc ce grand cercle comme grand cercle origine. Le pôle correspondant est appelé Zénith (Z). La direction origine est celle où culminent les étoiles dans leur mouvement diurne (voir plus loin). Une étoile est repérée par :



FIG. 1.1 – Traînées des étoiles autour du pôle nord céleste. Photographie obtenue avec une pose d'environ 6 heures.

- l'azimut A (dans le sens indirect)
- la hauteur h



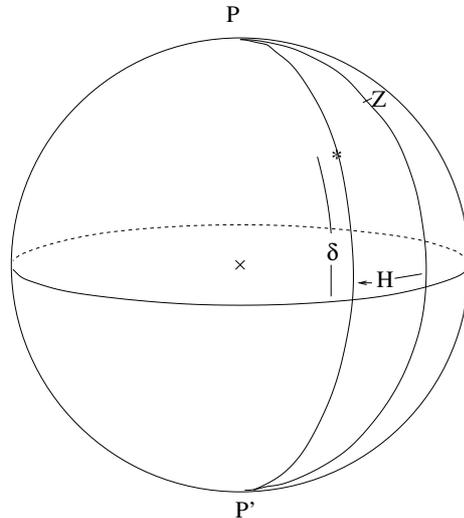
1.2 Coordonnées horaires

Le mouvement diurne s'observe par le mouvement apparent des étoiles : elles décrivent des arcs de cercle, centrés sur un point particulier de la sphère céleste (fig. 1.1). Ce point est appelé pôle céleste nord et noté P .

On construit à partir de ce point un nouveau système de coordonnées. Le grand cercle

origine est celui correspondant au pôle P . Il est appelé équateur céleste. Le demi grand cercle origine est celui passant par le zénith. Une étoile est repérée par :

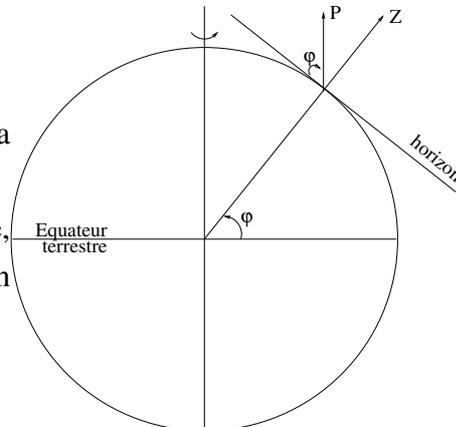
- l'angle horaire H (dans le sens indirect)
- la déclinaison



Interprétation du mouvement diurne et hauteur du pôle sur l'horizon

Le mouvement diurne s'interprète comme étant issu du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même.

- la hauteur du pôle sur l'horizon est la latitude du lieu.
- P , Z et S sont sur un même grand cercle, c'est à dire, le Sud est le point sur l'horizon et sur le demi grand cercle $P'Z$.



1.3 Coordonnées équatoriales

On a vu que la sphère des fixes est animée d'un mouvement de rotation uniforme par rapport à la sphère céleste locale. Si on définit un système de coordonnées sur la sphère des fixes, les étoiles auront des coordonnées constantes dans ce système.

- Le pôle est le même que pour le repère horaire (ce point est fixe dans les deux repères). Le grand cercle origine est donc aussi l'équateur.

- L'origine sur l'équateur est le point γ . Ce point est proche de la constellation des Poissons. Il est défini comme étant l'intersection entre l'équateur céleste et le grand cercle définissant l'écliptique (plan de l'orbite de la Terre autour du Soleil). Entre les deux points qui satisfont à cette définition, on prend celui pour lequel le Soleil passe avec une déclinaison croissante.

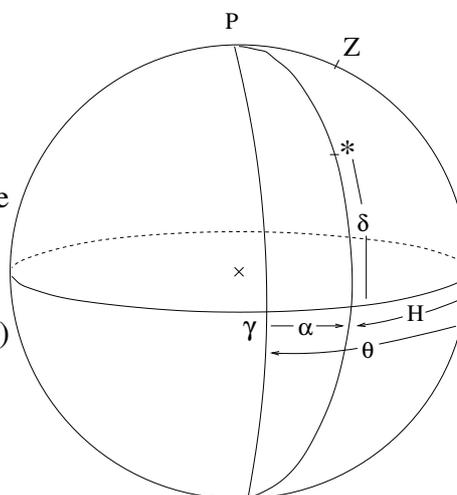
Les coordonnées équatoriales sont :

- l'ascension droite α (dans le sens direct)
- la déclinaison δ : (la même que pour les coordonnées horaires)

Le mouvement de la sphère des fixes par rapport à la sphère locale permet de définir une échelle de temps : le temps sidéral local. Il est noté θ et c'est l'angle horaire du point γ .

Quelle soit l'étoile considérée et à chaque instant, on a :

$$\underline{H = \theta - \alpha} \quad (1.1)$$



Chapitre 2

Formulation du problème des N-corps

Il s'agit de l'étude de N points matériels soumis chacun à l'attraction gravitationnelle des autres points.

Avant de mettre en équation le problème des N-corps pour N quelconque ($N > 2$) nous allons le faire pour le cas $N = 2$. L'écriture du problème sera simplifiée et il sera alors aisé de l'étendre à N plus grand que 2. Par ailleurs le problème des 2-corps est la base de toute la mécanique céleste, ou tout au moins à la base des méthodes de perturbation utilisées notamment dans l'étude de la dynamique du système solaire.

On se donne, pour tout ce chapitre, un repère galiléen défini par le repère orthonormé suivant : $\mathcal{R}_O = (Oxyz)$.

2.1 Le problème des 2-corps

le problème de 1-corps

Soit M une particule matérielle de masse m et de coordonnées $M = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ qui subit une force centrale attractive (ie : dirigée vers O) proportionnelle à $\frac{1}{OM^2}$ et à m , c'est à dire :

$$\vec{F} = -KM \frac{m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et, K et M sont des constantes. Les équations du mouvement s'écrivent donc :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -KM \frac{m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Si la masse m est non nulle, on peut simplifier :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{KM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.1)$$

En fait le problème de 1-corps n'a pas un sens physique très rigoureux. Il ne vérifie pas, par exemple, le principe d'action et de réaction : le point O devrait lui aussi subir une force et n'est donc plus l'origine d'un repère galiléen. Ce problème est donc plutôt académique. Nous l'avons présenté car sa formulation est très simple, et surtout, parce que le problème physique des deux corps peut se ramener à cette formulation.

le problème des deux corps

Soient maintenant deux points $M_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ de masses respectives m_1 et m_2 . Ces deux particules matérielles s'attirent selon la loi de Newton :

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} &= -K \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\overrightarrow{M_2 M_1}}{r} \\ m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2} &= -K \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{r} \end{aligned} \quad (2.2)$$

où $r = M_1 M_2$ est la distance mutuelle et K la constante de gravitation universelle. (2.2) est un système différentiel d'ordre 2 avec 6 degrés de liberté. La résolution de ce problème d'ordre 12 nécessite donc d'introduire 12 constantes d'intégration arbitraires.

En ajoutant les deux équations de (2.2), on obtient $\frac{d^2(m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2})}{dt^2} = \vec{0}$. En introduisant le point G centre de gravité de M_1 et M_2 et si $m_1 + m_2 \neq 0$, cette dernière expression devient $\frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} = \vec{0}$. Le mouvement de G est donc rectiligne et uniforme. Sur les 12 constantes arbitraires, 6 définissent ce mouvement (3 pour la position initiale de G , et 3 sa vitesse).

Le point O du repère : $\mathfrak{R}_O = (Oxyz)$ peut ainsi être pris en G . En utilisant $\overrightarrow{M_2 M_1} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \overrightarrow{GM_1}$ et $\overrightarrow{M_1 M_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \overrightarrow{GM_2}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \overrightarrow{GM_1}}{dt^2} &= -K \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\overrightarrow{GM_1}}{(GM_1)^3} \\ \frac{d^2 \overrightarrow{GM_2}}{dt^2} &= -K \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\overrightarrow{GM_2}}{(GM_2)^3} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Pour pouvoir écrire la première équation, on a simplifié les deux membres de l'égalité par

m_1 . Cela signifie que m_1 doit être non nulle. De la même manière m_2 doit être elle aussi non nulle.

remarque 1

Il n'est nécessaire de résoudre que l'une ou l'autre des deux équations car, par exemple, le mouvement de M_2 se déduit de celui de M_1 par $\overrightarrow{GM_2} = -\frac{m_1}{m_2}\overrightarrow{GM_1}$.

remarque 2

D'après (2.3) et (2.1), le problème des 2-corps est équivalent à 2 problèmes de 1-corps où le centre attractif serait G dont la masse $M = \frac{m_i^3}{(m_1+m_2)^2}$ pour $i = 1, 2$.

Le point G n'est pas un point physique dans le sens où il ne s'observe pas mais se calcule. C'est le mouvement relatif de M_1 autour de M_2 qui est observé :

En soustrayant les deux équations de (2.2), toujours après avoir simplifié les deux membres de l'égalité par m_1 ou m_2 , on obtient :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{M_2 M_1}}{dt^2} = -K(m_1 + m_2) \frac{\overrightarrow{M_2 M_1}}{(M_2 M_1)^3} \quad (2.4)$$

Si M_1 est une planète et si M_2 est le Soleil, on dit qu'on a "jeté" la planète dans le Soleil : on suppose que le Soleil est fixe de masse $(m_1 + m_2)$ et que la planète est de masse nulle. On s'est ainsi ramené au problème de 1-corps.

le problème képlérien

(2.1), (2.3) et (2.4) peuvent s'écrire :

$$\boxed{\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}} \quad (2.5)$$

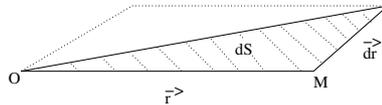
où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et $\mu > 0$. C'est le problème de Képler.

l'on peut encore écrire $\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}) = \vec{0}$, c'est à dire :

$$\boxed{\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{G} \quad (\text{Cste})} \quad \text{invariance du moment cinétique} \quad (2.6)$$

Les vecteurs \vec{r} et $\frac{d\vec{r}}{dt}$ seront donc toujours orthogonaux à \vec{G} . Ce qui signifie que, si $\vec{G} \neq \vec{0}$, le mouvement se fait dans le plan passant par le point O et orthogonal à \vec{G} .

De plus, si on note dS l'élément d'aire parcouru par le rayon vecteur \vec{r} pendant l'élément de temps dt ,



on a $Gdt = 2dS$ puisque $\|\vec{r} \wedge d\vec{r}\| = Gdt$. Ce qui donne la loi des aires : $\frac{dS}{dt} = G/2$ (=Cste). Ainsi, l'orientation de \vec{G} indique le plan du mouvement et son module donne la loi des aires. Si $\vec{G} = \vec{0}$, le mouvement est rectiligne et porté par la direction commune de \vec{r} et $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

*

En remarquant que $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\frac{\mu}{r}) = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$, où $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ correspond à l'opérateur $\overrightarrow{\text{Grad}}$ qui est un opérateur de dérivation, et en multipliant l'expression (2.5) par $\frac{d\vec{r}}{dt}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\frac{\mu}{r}) &= 0 \\ \text{ou encore } \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}) - \frac{d}{dt}(\frac{\mu}{r}) &= 0 \end{aligned}$$

En notant v la vitesse (ie : $v = \sqrt{\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}$), on a $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}) = 0$. Soit :

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = h \quad (\text{cste})} \quad \text{intégrale de l'énergie} \quad (2.7)$$

Si h est négatif alors r est borné et le corps ne peut s'éloigner à l'infini. Inversement, si on suppose que le corps peut s'éloigner à l'infini (c'est à dire si $r \rightarrow \infty$, et dans ce cas h doit être positif) alors $\sqrt{2h}$ représente la "vitesse à l'infini".

2.3 Cas général ($N > 2$)

Soient N points matériels P_i de masse m_i . Dans la suite, on souhaitera particulariser un point pour, par exemple, repérer le mouvement des autres points par rapport à ce point. Il est alors commode de le noter P_0 et de numéroter les autres de 1 à n . C'est pourquoi on pose $N = n + 1$ et on considère P_0, P_1, \dots, P_n de masses respectives m_0, m_1, \dots, m_n ($m_k > 0$).

Ces N corps étant isolés dans l'espace, les équations s'écrivent :

$$m_k \frac{d^2 \overrightarrow{OP_k}}{dt^2} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n -K \frac{m_i m_k}{P_i P_k^3} \overrightarrow{P_i P_k} \quad k = 0, \dots, n \quad (2.8)$$

Ce sont N équations différentielles vectorielles du second ordre ou un système de $3N$ équations différentielles scalaires du second ordre. C'est donc un système d'ordre $6N$. On peut réduire ces équations de 10 ordres grâce aux mêmes 10 intégrales premières que nous avons vu dans le problème des 2-corps : 6 représentent le mouvement rectiligne et uniforme du barycentre, une est "l'intégrale de l'énergie" et les trois dernières correspondent "l'intégrale du moment cinétique".

Barycentre

Le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme puisque la somme de toute les forces des équations (2.8) est nulle. En effet,

$$\sum_{k=0}^n m_k \frac{d^2 \overrightarrow{OP_k}}{dt^2} = \vec{0} \quad (2.9)$$

et comme

$$\sum_{k=0}^n m_k \overrightarrow{OP_k} = M \overrightarrow{OG} \quad \text{avec} \quad M = \sum_{k=0}^n m_k$$

on a

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG_0} + \vec{V}_G t$$

avec G_0 et \vec{V}_G représentent 6 constantes d'intégration arbitraires.

Remarque : G peut donc être pris comme centre d'un repère galiléen. En particulier, on peut écrire, si on le juge utile, $O = G$.

Moment cinétique

Il est facile de voir que

$$\sum_{k=0}^n \overrightarrow{OP_k} \wedge m_k \frac{d^2 \overrightarrow{OP_k}}{dt^2} = \vec{O}$$

Il suffit pour cela d'utiliser (2.8) et ensuite de séparer les termes $i < k$ de ceux $i > k$ pour remarquer l'annulation deux à deux. Ainsi

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^n \overrightarrow{OP_k} \wedge m_k \frac{d \overrightarrow{OP_k}}{dt} \right) = \vec{O}$$

Ce qui signifie que le moment cinétique en O des N corps est un vecteur constant. Notons \vec{C} le moment cinétique au point G^1

$$\vec{C} = \sum_{k=0}^n \overrightarrow{GP_k} \wedge m_k \frac{d \overrightarrow{GP_k}}{dt} \quad (2.10)$$

Le plan orthogonal à \vec{C} en G est appelé plan invariable du système.

Energie

On met en évidence l'intégrale de l'énergie en calculant la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^n m_k \left(\frac{d \overrightarrow{OP_k}}{dt} \right)^2 = \sum_{k=0}^n m_k \frac{d^2 \overrightarrow{OP_k}}{dt^2} \cdot \frac{d \overrightarrow{OP_k}}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{K m_i m_k}{P_k P_i^3} \overrightarrow{P_k P_i} \cdot \frac{d \overrightarrow{OP_k}}{dt}$$

Cette somme est du type

$$\sum_{i \neq k} c_{ik} \quad \text{avec} \quad c_{ik} = a_{ik} b_k \quad \text{et} \quad a_{ki} = -a_{ik}$$

¹Nous l'avons noté \vec{G} dans le problème képlérien mais cette notation prête trop à confusion ici.

En séparant encore les termes $i < k$ de ceux $i > k$, on obtient

$$\sum_{i \neq k} c_{ik} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n (c_{ik} + c_{ki}) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n a_{ik}(b_k - b_i)$$

Résultat qu'on peut appliquer ici :

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n \frac{K m_i m_k}{P_k P_i^3} \overrightarrow{P_k P_i} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{OP_k}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OP_i}}{dt} \right)$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n \frac{K m_i m_k}{P_k P_i^3} \overrightarrow{P_k P_i} \cdot \left(-\frac{d\overrightarrow{P_k P_i}}{dt} \right)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n \frac{K m_i m_k}{P_k P_i} \right)$$

La parenthèse du membre de gauche est le potentiel que l'on note $-U$. L'énergie potentielle est ainsi U et on a :

$$T + U = h \quad \text{avec} \quad U = - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n \frac{K m_i m_k}{P_k P_i} \quad (2.11)$$

h est représentée l'énergie cinétique totale du système. C'est une constante du mouvement des N corps.

La réduction du système différentiel de 4 ordres grâce aux intégrales h et \vec{C} est rarement faite car on perdrait alors les symétries présentes dans les équations initiales. Par contre, il est intéressant d'effectuer la réduction due au mouvement du barycentre, ou comme nous avons fait dans le problème des 2 corps, d'étudier le mouvement relatif.

2.4 Réduction à (N-1) corps

On étudie le mouvement relatif des points P_k par rapport à l'un d'entre eux, disons P_0 . Par (2.8) appliqué à P_0 et P_k (simplifié par m_0 ou m_k) et par la relation de Chasles, on obtient :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{P_0 P_k}}{dt^2} = - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n -K \frac{m_i}{P_i P_0^3} \overrightarrow{P_i P_0} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n -K \frac{m_i}{P_i P_k^3} \overrightarrow{P_i P_k}$$

En notant

$$\overrightarrow{r_k} = \overrightarrow{P_0 P_k} \quad (2.12)$$

, et en isolant le terme $i = 0$ de la deuxième somme et le terme $i = k$ de la première somme, on a

$$\frac{d^2 \overrightarrow{r_k}}{dt^2} = -K(m_0 + m_k) \frac{\overrightarrow{r_k}}{r_k^3} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n K m_i \left(\frac{\overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r_k}}{\|\overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r_k}\|^3} - \frac{\overrightarrow{r_i}}{r_i^3} \right) \quad (2.13)$$

On peut choisir n'importe lequel P_0 parmi les N points matériels. On choisit souvent celui qui a la masse la plus élevée ou celui autour duquel tournent les autres points. Par exemple, dans le mouvement des planètes, le Soleil est mis en P_0 . De cette manière la somme dans le second membre de (2.13) apparaît comme une petite quantité. En effet, les distances mutuelles ($\|\overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r_k}\|$) n'étant jamais petites, chaque terme de la somme est de l'ordre de m_i (un millième pour la plus massive des planètes). Ainsi, dans le cas des planètes, les mouvements issus de (2.13) sont proches de n mouvements képlériens $\frac{d^2 \overrightarrow{r_k}}{dt^2} = -K(m_0 + m_k) \frac{\overrightarrow{r_k}}{r_k^3}$. On dit dans ce cas que l'on a n problèmes képlériens perturbés ; pour chaque k la perturbation est $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n K m_i \left(\frac{\overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r_k}}{\|\overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r_k}\|^3} - \frac{\overrightarrow{r_i}}{r_i^3} \right)$.

2.5 Potentiel

Les équations du mouvement des N corps peuvent s'écrire à l'aide de l'énergie potentiel U donnée en (2.11). En effet, en $O = G$ on vérifie que les équations (2.8) s'écrivent :

$$m_k \frac{d^2 \overrightarrow{G P_k}}{dt^2} = -\overrightarrow{\text{Grad}}_k U \quad k = 0, \dots, n \quad (2.14)$$

En coordonnées cartésiennes, l'opérateur gradient de U au point P_k s'exprime

$$\overrightarrow{\text{Grad}}_k U = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_k} \\ \frac{\partial U}{\partial y_k} \\ \frac{\partial U}{\partial z_k} \end{vmatrix}$$

Les x_k , y_k et z_k désignent les coordonnées cartésiennes de P_k , ou ce qui est équivalent, les coordonnées cartésiennes de \overrightarrow{GP}_k .

L'avantage de cette expression est qu'elle utilise qu'une seule fonction (le potentiel $-U$) pour toutes les équations même si, pour une équation d'indice k donné, seuls n termes parmi les $\frac{n(n+1)}{2}$ qui définissent la somme, interviennent dans le calcul du gradient.

Dans les équations du mouvement relatif (2.13), on peut aussi écrire le second membre à l'aide d'un gradient. On définit l'opérateur gradient

$$\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{r}_k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial X_k} \\ \frac{\partial}{\partial Y_k} \\ \frac{\partial}{\partial Z_k} \end{vmatrix}$$

où les X_k , Y_k et Z_k désignent les coordonnées de \overrightarrow{r}_k . Les équations deviennent alors :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{r}_k}{dt^2} = -K(m_0 + m_k) \frac{\overrightarrow{r}_k}{r_k^3} + \frac{\partial V_k}{\partial \overrightarrow{r}_k} \quad (2.15)$$

avec

$$V_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n K m_i \left(\frac{1}{\|\overrightarrow{r}_i - \overrightarrow{r}_k\|} - \frac{\overrightarrow{r}_i \cdot \overrightarrow{r}_k}{r_i^3} \right)$$

Chapitre 3

Approches du problème des N-corps

Le problème des N-corps consiste à trouver le mouvement de N points matériels qui s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton. Nous l'avons formulé dans le chapitre précédent.

- Si $N=1$ ou 2 , on aboutit au problème képlérien qui est complètement intégrable (Chap.4).
- Si $N=3$, il s'agit du problème des 3 corps dont Poincaré disait qu'il "a une telle importance pour l'Astronomie, et il est en même temps si difficile, que tous les efforts des géomètres ont été depuis longtemps dirigés de ce côté. Une intégration complète et rigoureuse étant manifestement impossible, c'est aux procédés d'approximation que l'on a dû faire appel" (H. Poincaré, "Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste", 1892). C'est en effet lui qui a montré que ce problème n'est pas intégrable dans sa généralité en ce sens qu'il n'existe pas d'intégrale première du mouvement analytique et uniforme autre que celle de l'énergie et celle du moment cinétique.
- Si N est petit (disons de l'ordre de 10), on parle de Mécanique Céleste et les méthodes sont identiques à celles utilisées dans le problème des 3 corps.
- Si N est grand (disons entre 10^3 et 10^{12}), il s'agit de dynamique stellaire. Dans ce cas, N varie de quelques centaines pour des amas ouverts à quelques centaines de milliers pour des amas globulaires jusqu'à quelques centaines de milliards pour des galaxies.

Le cas des anneaux planétaires peut être vu comme intermédiaire à ces deux derniers cas : La dynamique d'UNE particule autour d'une planète subissant son attraction gravitationnelle en même temps que celles de quelques autres corps (satellites principaux, satellites bergers, ...) relève des méthodes de la mécanique céleste ; par contre l'effet collectif de toutes les particules des anneaux s'apparente à la dynamique stellaire (à condition toute-

fois de négliger les collisions et quelques effets dissipatifs). De toute façon, le cas N grand sera peu développé dans ce cours puisqu'il éloigne le sujet de la dynamique du système solaire proprement dit.

Quatre approches sont utilisées pour étudier ce type de système :

1. l'approche analytique. Nous nous contenterons dans ce cours de regarder quelques figures d'équilibre et ses conséquences (Chap. 8).
2. l'approche numérique : on résoud numériquement l'équation différentielle correspondante.
3. l'approche statistique : on considère le système stellaire comme un fluide d'étoiles, le système est décrit par une fonction de distribution.
4. l'approche observationnelle que nous n'aborderons pas dans ce cours.

Avant de regarder les approches numérique et statistique, introduisons la notion de "sphère d'influence" qui nous est utile à plusieurs endroits dans ce cours.

3.1 Sphère d'influence

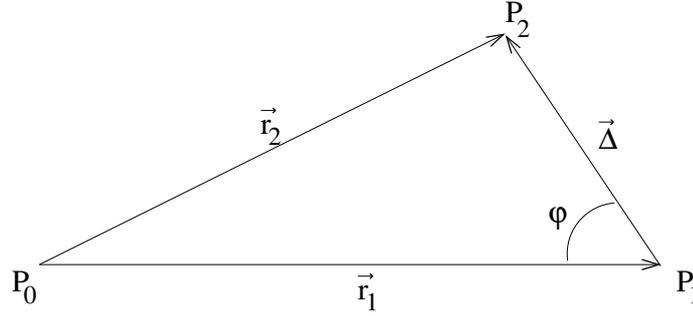
Reprenons les équations (2.13) et écrivons les dans le cas $n = 2$ et pour $k = 1, 2$:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -K(m_0 + m_1) \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + Km_2 \left(\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right) \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -K(m_0 + m_2) \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} + Km_1 \left(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right) \quad (3.2)$$

Ces équations sont donc une formulation du problème des 3 corps. Si par exemple m_2 est négligeable (exemple : Soleil+Jupiter+astéroïde), la première équation est un problème képlérien et seule la deuxième équation mérite une étude particulière : C'est le "problème restreint des 3 corps".

Afin de faciliter la discussion et surtout parceque nous nous intéressons au cas du système solaire, nous allons supposer dans la suite que $m_0 \gg m_1$ et que $m_0 \gg m_2$. En fixant les idées, P_0 est le Soleil, P_1 une planète (par exemple, la plus massive des planètes du système solaire : Jupiter) et P_2 un autre corps. Pour l'instant P_2 peut être une planète de masse du même ordre de grandeur que celle de P_1 ou un corps de masse négligeable (ex : une sonde spatiale).

FIG. 3.1 – La géométrie des 3 corps P_0 , P_1 et P_2 .

On note encore

$$\vec{\Delta} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} \quad \text{le rayon vecteur jovicentrique du troisième corps } P_2$$

, et on rappelle que

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{P_0P_1} \quad \text{le rayon vecteur héliocentrique de Jupiter}$$

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{P_0P_2} \quad \text{le rayon vecteur héliocentrique du troisième corps } P_2$$

Intéressons nous au mouvement de P_2 . Pour avoir le mouvement jovicentrique de P_2 , il suffit de soustraire les équations (3.2) et (3.1) :

$$\frac{d^2 \vec{\Delta}}{dt^2} = -K(m_1 + m_2) \frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3} + Km_0 \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right) \quad (3.3)$$

Le mouvement héliocentrique de P_2 est donné par (3.2) qui se réécrit :

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -K(m_0 + m_2) \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - Km_1 \left(\frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3} + \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right) \quad (3.4)$$

Les deux formes obtenues permettent de séparer, dans l'accélération de P_2 , la partie képlérienne de la partie non képlérienne. La notion de "sphère d'influence" que nous allons définir permet de voir quand la partie képlérienne peut être considérée comme une perturbation d'un problème képlérien. Plus précisément, cette notion permet de dire à quelle condition et à quelle précision, les équations (3.3) ou (3.4) peuvent être approchées

$$\text{par } \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -K(m_0 + m_2) \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \quad \text{ou par } \frac{d^2 \vec{\Delta}}{dt^2} = -K(m_1 + m_2) \frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3}$$

3.1.1 Cas d'un mouvement héliocentrique

Regardons tout d'abord, quand l'équation (3.4) peut être vue comme un mouvement képlérien perturbé :

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -K(m_0 + m_2) \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} + \text{Perturbation}$$

Comme $m_1 \ll m_0$, cela se produit que si Δ n'est pas trop petit¹. On se demande alors à quelle distance de P_1 peut passer P_2 pour que le rapport R_h en module de la partie perturbatrice sur la partie képlérienne soit inférieur à un niveau de précision ε donné

$$R_h = \frac{m_1 \left\| \frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3} + \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right\|}{\frac{m_0 + m_2}{r_2^2}} < \varepsilon \quad (3.5)$$

Soit φ l'angle jovicentrique de la direction de P_2 par rapport à celle du Soleil, et posons $u = \frac{\Delta}{r_1}$. Par des calculs de géométrie élémentaire, on trouve

$$R_h = \frac{m_1}{m_0 + m_2} \frac{1}{u^2} (1 - 2u \cos \varphi + u^2) \sqrt{1 - 2u^2 \cos \varphi + u^4} \quad (3.6)$$

Puisque P_2 se rapproche de P_1 (et puisque $m_1 \ll m_0$), on considère u petit devant 1, et on assimile R_h à sa partie principale $\frac{m_1}{m_0 + m_2} \frac{1}{u^2}$. Ainsi la condition (3.5) devient :

$$\frac{m_1}{\varepsilon(m_0 + m_2)} < u^2 \quad (3.7)$$

3.1.2 Cas d'un mouvement planétocentrique

Regardons maintenant, quand l'équation (3.3) peut être vue comme un mouvement képlérien perturbé :

$$\frac{d^2 \vec{\Delta}}{dt^2} = -K(m_1 + m_2) \frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3} + \text{Perturbation}$$

On se demande alors à quelle distance de P_1 peut s'éloigner de P_2 pour que le rapport R_p en module de la partie perturbatrice sur la partie képlérienne soit inférieur à un niveau

¹On ne considère pas le cas où r_1 est petit, ce qui ne se produit pas si P_1 est Jupiter.

de précision ε donné

$$R_p = \frac{\left\| m_0 \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right) \right\|}{\frac{m_1 + m_2}{\Delta^2}} < \varepsilon \quad (3.8)$$

Avec les mêmes notations que précédemment, on trouve :

$$R_p = u^2 \frac{m_0}{m_1 + m_2} \frac{\sqrt{1 + (1 - 2u \cos \varphi + u^2)^2 - 2(1 - u \cos \varphi) \sqrt{1 - 2u \cos \varphi + u^2}}}{1 - 2u \cos \varphi + u^2} \quad (3.9)$$

dont la partie principale est

$$R_p = \frac{m_0}{m_1 + m_2} u^3 \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}$$

Une condition nécessaire à (3.8) est :

$$u^3 < \varepsilon \frac{m_1 + m_2}{m_0} \quad (3.10)$$

3.1.3 La “sphère”

Les deux conditions (3.7) et (3.10) définissent chacune une sphère de rayon respectif

$$u_h = \left(\frac{m_1}{\varepsilon(m_0 + m_2)} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad u_p = \left(\varepsilon \frac{m_1 + m_2}{m_0} \right)^{1/3}$$

A l'extérieur de la sphère définie par u_h , à ε près, l'accélération est képlérienne héliocentrique. Tandis qu'à l'intérieur de la sphère définie par u_p , l'accélération, toujours à ε près, est képlérienne jovicentrique.

Il est facile de tracer les courbes correspondantes à R_h et R_p en fonction de u . Celles-ci se coupent en un point (u_0, R_0) . Ce point définit la sphère d'influence proprement :

$$u_0 = u_h = u_p = \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^{2/5} \quad (3.11)$$

$$R_0 = R_h = R_p = \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^{1/5} \quad (3.12)$$

Les expressions utilisées ici de u_h et u_p ne sont valables que si u est suffisamment petit. On retrouve bien que c'est le cas si m_1 est un ordre de grandeur plus petit que m_0 . Pour obtenir ces expressions, on a de plus supposé que $m_2 \ll m_1$.

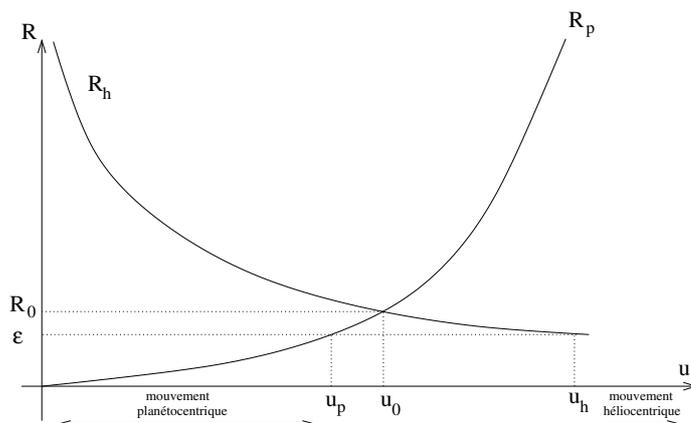


FIG. 3.2 – Définition de la sphère d'influence

TAB. 3.1 – Paramètres définissant la sphère d'influence des planètes du système solaire.

P_1	$\frac{m_1}{m_0}$	u_0	R_0	$u_0 r_1 (10^6 \text{ km})$
Mercure	$1,66 \cdot 10^{-7}$	0,0019	0,044	0,112
Vénus	$2,45 \cdot 10^{-6}$	0,0056	0,075	0,616
La Terre	$3,04 \cdot 10^{-6}$	0,0062	0,079	0,929
Mars	$3,23 \cdot 10^{-7}$	0,0025	0,050	0,576
Cérès	$5,9 \cdot 10^{-10}$	0,0002	0,014	0,085
Jupiter	$9,55 \cdot 10^{-4}$	0,0619	0,248	48,2
Saturne	$2,86 \cdot 10^{-4}$	0,0382	0,196	54,6
Uranus	$4,37 \cdot 10^{-5}$	0,0180	0,134	51,8
Neptune	$5,18 \cdot 10^{-5}$	0,0193	0,138	86,9
Pluton	$7,69 \cdot 10^{-9}$	0,0006	0,024	3,3

Si nous n'avions pas fait de majoration sur φ , nous aurions obtenu l'expression

$$u_0 = (1 + 3 \cos^2 \varphi)^{-1/10} \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^{2/5}$$

Or la valeur numérique de $(1 + 3 \cos^2 \varphi)^{-1/10}$ varie entre 0,87 et 1. Cela signifie que la surface correspondante n'est pas très éloignée d'une sphère mais qu'elle est quand même un peu allongée dans la direction perpendiculaire à celle Soleil-Planète.

Le Tableau (3.1) donne les rayons des sphères d'influence (en valeur relative u_0 et en millions de kilomètres pour $u_0 r_1$) avec la valeur du rapport de la "perturbation" sur la partie képlérienne R_0 .

On constate que les valeurs de R_0 sont relativement élevées, c'est à dire plus grande

que la valeur $\varepsilon = 10^{-2}$ qui est l'extrême limite pour considérer le problème comme képlérien perturbé. Par exemple le problème de la Lune qui est considéré comme un problème difficile en théorie des perturbations a son rapport $R_p = 6 \cdot 10^{-3}$ (pour $u = 0,00266$). Cependant, la plupart des satellites sont très à l'intérieur de la sphère d'influence de sa planète.

On constate aussi que Cérès, le plus gros corps de la ceinture d'astéroïdes, a une sphère d'influence non négligeable. On observe d'ailleurs quelquefois un satellite autour d'un astéroïde.

3.2 Intégration numérique

On a dit, qu'en général, on ne pouvait intégrer les problèmes des N-corps. Toutefois, on peut, par intégration numérique, trouver une solution particulière. Il faut pour cela que des conditions initiales soient données et la solution est composée d'une série discrétisée de points de la trajectoire sur un intervalle de temps fini. Comme tout calcul numérique, elle est affectée d'erreurs (numériques) qui ici se propagent pas à pas lors de l'intégration. Les intégrales premières peuvent alors servir à contrôler ces erreurs numériques puisqu'elles doivent rester constantes tout au long du calcul (expressions (2.10) et (2.11)).

3.2.1 Le problème de Cauchy

Soit $[0, T]$ un intervalle fermé de \mathbb{R} et f une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R}^d . On considère alors le système différentiel du premier ordre suivant avec une condition initiale :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.13)$$

où y est une application différentiable sur $[0, T]$ dans \mathbb{R}^d .

On a le théorème suivant :

Théorème 3.1

Si f est définie et continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ et si $\exists L > 0$ tel que

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L \|y - z\| \quad \text{condition de Lipschitz}$$

pour tout y et z appartenant à \mathbb{R}^d et tout t dans $[0, T]$. $\|\cdot\|$ désigne une norme de \mathbb{R}^d , alors le problème de Cauchy (3.13) admet, quelque soit y_0 , une solution unique sur $[0, T]$.

Preuve

Nous ne ferons cette preuve que dans le cas $d = 1$. On se place dans l'espace de Banach $C_\infty[0, T]$ des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans \mathbb{R} muni de la norme ∞ :

$$\|g\| = \max_{u \in [0, T]} |g(u)|$$

La solution y du problème de Cauchy vérifie, pour tout t dans $[0, T]$:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(u, y(u)) du \quad (3.14)$$

qui est une relation implicite.

Existence :

On considère la suite (y_k) des fonctions de $C_\infty[0, T]$ définie par

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0 \\ y_{k+1}(t) &= y_0 + \int_0^t f(u, y_k(u)) du \end{aligned}$$

On a

$$y_{k+1}(t) - y_k(t) = \int_0^t (f(u, y_k(u)) - f(u, y_{k-1}(u))) du$$

Avec la condition de Lipschitz, on obtient

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq L \int_0^t |y_k(u) - y_{k-1}(u)| du \quad (3.15)$$

En passant au max (pour u sur $[0, t]$) :

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq Lt \|y_k - y_{k-1}\| \quad (3.16)$$

Cette inégalité est vraie pour tout t dans $[0, T]$. On peut donc l'utiliser (où t est remplacé par u) dans (3.15) :

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq L^2 \|y_{k-1} - y_{k-2}\| \int_0^t u du = L^2 \frac{t^2}{2} \|y_{k-1} - y_{k-2}\|$$

On montre ainsi par récurrence que

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq L^n \frac{t^n}{n!} \|y_{k+1-n} - y_{k-n}\| \quad (3.17)$$

En effet, reportons comme précédemment cette inégalité dans (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(t) - y_k(t)| &\leq \frac{L^{n+1}}{n!} \|y_{k-n} - y_{k-1-n}\| \int_0^t u^n du \\ &= L^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \|y_{k+1-(n+1)} - y_{k-(n+1)}\| \end{aligned}$$

L'inégalité (3.17) est donc vraie pour tout $n (\leq k)$, donc en particulier pour $n = k$:

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq L^k \frac{t^k}{k!} \|y_1 - y_0\|$$

Cette inégalité est vraie pour tout t dans $[0, T]$ et en passant encore au max, on obtient :

$$\|y_{k+1} - y_k\| \leq L^k \frac{T^k}{k!} \|y_1 - y_0\|$$

Soit maintenant un entier $p \geq 1$. En remarquant que $C_{k+i}^k = C_{k+i}^i = \frac{(k+i)!}{k!i!}$ est un entier non nul donc ≥ 1 , on a $(k+i)! \geq k!i!$, et il vient

$$\|y_{k+p} - y_k\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \|y_{k+i+1} - y_{k+i}\| \leq L^k \frac{T^k}{k!} \|y_1 - y_0\| \sum_{i=0}^{p-1} L^i \frac{T^i}{i!}$$

Et comme de plus

$$\sum_{i=0}^{p-1} L^i \frac{T^i}{i!} \leq \exp LT$$

, on a :

$$\|y_{k+p} - y_k\| \leq L^k \frac{T^k}{k!} \|y_1 - y_0\| \exp LT$$

Or le second membre de cette inégalité tend vers 0 quand k tend vers ∞ . Cela signifie qu'il peut être rendu aussi petit que l'on souhaite, il suffit pour cela que k soit assez grand. Cela est vrai pour le premier membre. La suite (y_k) est donc une suite de Cauchy. L'espace $C_\infty [0, T]$ étant complet, il existe une fonction y de $C_\infty [0, T]$ vers laquelle converge (y_k) .

Par passage à la limite cette fonction vérifie :

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(u, y(u)) du$$

Nous avons donc démontré l'existence de la solution du problème de Cauchy.

Unicité :

Supposons qu'il existe une deuxième solution z du problème de Cauchy. On peut écrire :

$$y(t) - z(t) = \int_0^t (f(u, y(u)) - f(u, z(u))) du$$

On peut reprendre le schéma de la démonstration de l'existence. Avec la condition de Lipschitz, on obtient :

$$|y(t) - z(t)| \leq L \int_0^t |y(u) - z(u)| du$$

En passant au max (pour u sur $[0, t]$ inclus dans $[0, T]$) :

$$|y(t) - z(t)| \leq Lt \|y - z\|$$

Puis en reportant dans l'inégalité précédente :

$$|y(t) - z(t)| \leq L^2 \|y - z\| \int_0^t u du = L^2 \frac{t^2}{2} \|y - z\|$$

Ainsi on montre encore par récurrence que :

$$|y(t) - z(t)| \leq L^n \frac{t^n}{n!} \|y - z\|$$

Cette inégalité est vraie pour tout t dans $[0, T]$ et en passant au max, on obtient :

$$\|y - z\| \leq L^n \frac{t^n}{n!} \|y - z\|$$

, ou encore :

$$\|y - z\| \left(1 - L^n \frac{t^n}{n!}\right) \leq 0$$

En faisant tendre n vers ∞ , on obtient que

$$\|y - z\| \leq 0$$

Ce qui signifie que y et z sont la même solution et donc que la solution est unique.

Remarque importante :

- Si la fonction f est différentiable par rapport à la variable y
 - Si cette différentielle est continue
 - Si il existe M tel que $\left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\| \leq M$, pour tout t dans $[0, T]$ et tout y dans \mathbb{R}^d
- alors la condition de Lipschitz est vérifiée. En effet, on sait qu'il existe \tilde{y} tel que

$$f(t, y) - f(t, z) = \frac{\partial f(t, \tilde{y})}{\partial y} (y - z)$$

pour tout t dans $[0, T]$ et tout y et z dans \mathbb{R}^d .

Ainsi les conditions énoncées ci-dessus suffisent pour pouvoir dire que le problème de Cauchy admet une solution unique.

3.2.2 Recherche d'une solution discrète approchée

Il s'agit de rechercher, en certain points t_n de $[0, T]$, une approximation y_n de la solution exacte $y(t_n)$. Dans cette section nous allons nous limiter aux méthodes à pas constants et séparés. Elles s'écrivent sous la forme :

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h) \tag{3.18}$$

en démarrant avec la condition initiale :

$$y_0 = y(0)$$

Les t_n sont définis par

$$t_0 = 0 \quad \text{et} \quad t_{n+1} = t_n + h$$

, c'est-à-dire :

$$t_n = nh$$

ϕ est une application continue sur le compact $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times [0, T]$ à valeurs dans \mathbb{R}^d .

Cette application caractérise la méthode d'intégration. Nous supposons encore dans ce paragraphe que $d = 1$, ceci par souci de simplicité d'écriture. La généralisation à $d > 1$ ne pose pas de problème.

3.2.3 La méthode d'Euler

La méthode d'Euler consiste simplement à prendre

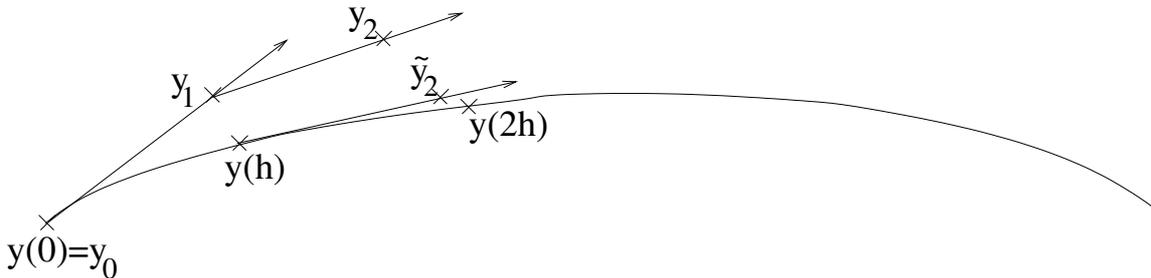
$$\phi(t_n, y_n, h) = f(t_n, y_n) \quad (3.19)$$

En effet, on sait que

$$\frac{dy}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

La méthode d'Euler consiste donc à identifier

$$f(t, y(t)) = \frac{dy}{dt}(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \text{ aux points } (t_n, y_n)$$



On voit apparaître deux sortes d'erreur :

- l'une due au fait qu'à chaque pas $\frac{dy}{dt}(t) \neq \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$
- l'autre qui se cumule, vient qu'on évalue $y(t_{n+1})$ à partir de y_n et non à partir de $y(t_n)$ (dans le schéma, $n = 1$)

Ces erreurs sont d'autant plus petites que h est petit. C'est l'objet des sections suivantes de les étudier.

La méthode d'Euler est la plus simple et la plus intuitive des méthodes d'intégration.

3.2.4 Consistance, stabilité et convergence

Ces notions que nous allons introduire ici ne seront utilisées ici que pour la méthode d'Euler mais elles s'appliquent bien-sûr aux autres méthodes d'intégration numérique.

Consistance

Cette notion indique que la méthode d'intégration doit être liée à l'équation différentielle à intégrer.

On dit que la méthode d'intégration (3.18) est consistante avec l'équation différentielle (3.13) si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_n \left| \frac{1}{h} (y(t_{n+1}) - y(t_n)) - \phi(t_n, y(t_n), h) \right| = 0$$

Théorème 3.2

La méthode d'Euler est consistante

Preuve

On a :

$$\frac{1}{h} (y(t_{n+1}) - y(t_n)) - f(t_n, y(t_n)) = \frac{1}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f(t, y(t)) - f(t_n, y(t_n))) dt$$

(On a $t_{n+1} - t_n = h$)

On utilise la continuité uniforme de f sur $\{(t, y(t)); t \in [0, T]\}$.

Avec

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(t, y(t)) - f(t_n, y(t_n))) = 0$$

(car $t \rightarrow t_n$, puisque $t \in [t_n, t_{n+1}]$), on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_n (f(t, y(t)) - f(t_n, y(t_n))) = 0$$

Cela entraîne

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_n \left| \frac{1}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f(t, y(t)) - f(t_n, y(t_n))) dt \right|$$

Stabilité

Cette notion indique l'effet des petites perturbations numériques dues à la troncature numérique qu'effectue la machine.

Soient y_n et z_n définies respectivement par :

$$y_{n+1} = y_n + h \phi(t_n, y_n, h)$$

y_0 quelconque

et

$$z_{n+1} = z_n + h (\phi(t_n, z_n, h) + \varepsilon_n)$$

z_0 quelconque

avec

$$t_0 = 0 \quad \text{et} \quad t_{n+1} = t_n + h$$

On dit que la méthode d'intégration (3.18) est stable s'il existe M_1 et M_2 indépendants de h tels que :

$$\max_n |y_n - z_n| \leq M_1 |y_0 - z_0| + M_2 \max_n |\varepsilon_n|$$

Cette notion ne dépend que de la méthode d'intégration et n'est pas du tout liée au système différentielle étudiée. Elle indique qu'une (petite) perturbation numérique sur la condition initiale et sur le calcul effectif de ϕ n'entraîne qu'une perturbation du même ordre de grandeur sur y_n et ceci indépendamment de h .

Théorème 3.3

La méthode d'Euler est stable

Preuve

On a :

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| \leq |y_n - z_n| + h |f(t_n, y_n) - f(t_n, z_n)| + h |\varepsilon_n| \quad (3.20)$$

On va utiliser que f vérifie la condition de Lipschitz. Notons M la constante correspondante. Montrons par récurrence que :

$$|y_n - z_n| \leq (1 + hM)^n |y_0 - z_0| + \frac{(1 + hM)^n - 1}{M} \max_n |\varepsilon_{n-1}|$$

Au rang suivant en utilisant (3.20) :

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| \leq (1 + hM) |y_n - z_n| + h |\varepsilon_n|$$

d'où, avec l'hypothèse de récurrence :

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| \leq (1 + hM)^{n+1} |y_0 - z_0| + \frac{(1 + hM)^{n+1} - 1}{M} \max_n |\varepsilon_{n-1}|$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{-(1 + hM) \max_n |\varepsilon_{n-1}| + hM |\varepsilon_n|}{M} \\
& = (1 + hM)^{n+1} |y_0 - z_0| + \frac{A}{M}
\end{aligned}$$

où

$$A = ((1 + hM)^{n+1} - 1 - hM) \max_n |\varepsilon_{n-1}| + hM |\varepsilon_n|$$

Il suffit alors d'écrire que

$$(1 + hM)^{n+1} = 1 + (n + 1)hM + \sum_{p=2}^{n+1} C_{n+1}^p (hM)^p$$

Donc

$$\begin{aligned}
A & = hM |\varepsilon_n| + \left\{ nhM + \sum_{p=2}^{n+1} C_{n+1}^p (hM)^p \right\} \max_n |\varepsilon_{n-1}| \\
& \leq \max_n |\varepsilon_n| \left\{ hM + nhM + \sum_{p=2}^{n+1} C_{n+1}^p (hM)^p \right\} \\
& = ((1 + hM)^{n+1} - 1) \max_n |\varepsilon_n|
\end{aligned}$$

Ce qui montre la relation de récurrence.

Or, on a pour tout x réel : $1 + x \leq \exp x$, et comme $nh \leq T$, on en déduit :

$$(1 + hM)^n \leq \exp(nhM) \leq \exp TM$$

Cela permet de conclure que

$$|y_n - z_n| = \exp TM |y_0 - z_0| + \frac{\exp TM - 1}{M} \max_n |\varepsilon_{n-1}|$$

On a donc la stabilité, les constantes (indépendantes de h) sont :

$$M_1 = \exp TM \quad \text{et} \quad M_2 = \frac{\exp TM - 1}{M}$$

Convergence

Cette notion exprime le fait que la solution approchée doit tendre vers la solution exacte en tout point de $[0, T]$ lorsque le pas h tend vers 0.

On dit que la méthode d'intégration (3.18) est convergente avec l'équation différen-

tielle (3.13) si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_n |y_n - y(t_n)| = 0$$

Théorème 3.4

La méthode d'Euler est convergente

Preuve

Elle découle directement de la consistante et de la stabilité. En effet, on peut écrire :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h(f(t_n, y(t_n)) + \varepsilon_n) \quad \text{et} \quad y(0) = y_0$$

Comme la méthode est consistante, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_n |\varepsilon_n| = 0$$

On utilise maintenant la stabilité en prenant $z_n = y(t_n)$ (et $z_0 = y(0)$) : il existe donc une constante M_2 indépendante de h telle que :

$$\max_n |y_n - y(t_n)| \leq M_2 \max_n |\varepsilon_n|$$

En faisant tendre h vers 0, on a la convergence.

3.2.5 La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

La convergence est indispensable à une méthode d'intégration, mais elle n'indique pas la manière dont se fait cette convergence. En fait pour une méthode d'intégration donnée, on cherche à savoir à quelle ordre p s'effectue cette convergence². C'est à dire :

$$\max_n |y_n - y(t_n)| = O(h^p)$$

On a vu que la méthode d'Euler est d'ordre 1. On pourrait chercher des méthodes d'ordre plus élevé

Ce n'est pas l'objet de ce cours d'aller plus loin dans l'étude des méthodes d'intégration numérique. Citons simplement la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Cette méthode numérique classique utilise une technique calquée sur la méthode d'Eu-

²En pratique, on s'y prend dans l'autre sens : la méthode est construite de façon à atteindre l'ordre souhaité. Voir cours d'analyse numérique.

ler. Elle converge considérablement plus vite que cette dernière. Elle fut développée à la fin du XIX^e siècle par les mathématiciens allemands C. Runge et W. Kutta.

Dans la méthode d'Euler, ϕ est simplement la pente $f(t, y)$. Pour la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, on prend pour la fonction ϕ la moyenne pondérée des valeurs de f en quatre points :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, y) \\ k_2 &= f\left(t + \frac{h}{2}, y + h\frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(t + \frac{h}{2}, y + h\frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= f(t + h, y + hk_3) \end{aligned}$$

$$\phi(t, y, h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.21)$$

k_1 est la pente au point de départ.

k_2 est la pente au point milieu où l'on arrive en un demi pas par la méthode d'Euler.

Si k_2 est une bonne pente moyenne, le point milieu du segment $[y(t_n), y(t_n + h)]$ doit être le point $(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{h}{2}k_2)$. La pente en ce point est k_3

Si k_3 est une bonne pente moyenne sur $[y(t_n), y(t_n + h)]$, on doit arriver en $(t_n + h, y(t_n) + hk_3)$ après un pas entier et la pente en ce point doit être k_4 .

3.3 Approche statistique

Cette approche n'est intéressante que si N est grand. Quelques applications sont possibles dans le système solaire mais l'essentiel de celles-ci se trouve dans la dynamique stellaire.

3.3.1 Théorème du viriel et la relation masse-période-distance

On définit le moment d'inertie du système par rapport aux axes par

$$J = \sum_{k=0}^n m_k \overline{OP_k}^2$$

Dans le cas des systèmes stellaires, ceux-ci sont dans un état stationnaire, c'est à dire qu'on peut considérer que J est constant en moyenne. Ainsi, en moyenne, $\frac{d^2 J}{dt^2} = 0$. Cela

est d'autant mieux vérifié que le nombre N d'étoiles est grand.

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= 2 \sum_{k=0}^n m_k \overrightarrow{OP_k} \cdot \frac{d\overrightarrow{OP_k}}{dt} \\ \frac{d^2 J}{dt^2} &= 2 \sum_{k=0}^n m_k \left(\frac{d\overrightarrow{OP_k}}{dt} \right)^2 + 2 \sum_{k=0}^n m_k \overrightarrow{OP_k} \cdot \frac{d^2 \overrightarrow{OP_k}}{dt^2} \\ \frac{d^2 J}{dt^2} &= 4T + 2 \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{K m_i m_k}{P_k P_i^3} \overrightarrow{P_k P_i} \cdot \overrightarrow{OP_k} \\ &= 4T + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n \frac{K m_i m_k}{P_k P_i^3} \overrightarrow{P_k P_i} \cdot (\overrightarrow{OP_k} - \overrightarrow{OP_i}) \\ &= 4T - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n \frac{K m_i m_k}{P_k P_i} \end{aligned}$$

On reconnaît le potentiel U défini en (2.11). On a donc :

$$\frac{d^2 J}{dt^2} = 4T + 2U$$

Puisque $\frac{d^2 J}{dt^2} = 0$, le théorème du viriel s'écrit :

$$2T + U = 0 \tag{3.22}$$

Comme on a vu en (2.11) que l'énergie totale h est égale à $T + U$, on obtient :

$$T = -h \quad \text{et} \quad U = 2h$$

Relation masse-période-distance

On suppose qu'il n'y a pas de corrélation entre les distances, les vitesses et les masses des étoiles de l'amas stellaire. On s'autorise ainsi à assimiler la moyenne d'un produit au produit des moyennes. L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n m_k v_k^2 \quad \text{devient donc} \quad T = \frac{N}{2} \bar{m} \bar{v}^2$$

De la même manière, avec l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned}
 U &= - \sum_{i < k} \frac{K m_i m_k}{P_k P_i} \\
 &= - \frac{N(N-1)}{2} K \text{Esp} \left(\frac{m_i m_k}{P_k P_i} \right) \\
 &\approx - \frac{N^2}{2} K \frac{\bar{m} \bar{m}}{\bar{r}}
 \end{aligned}$$

\bar{r} est le rayon moyen du système et, si on note M la masse totale du système ($M = N\bar{m}$), on en déduit avec le théorème du viriel :

$$\bar{v}^2 = \frac{KM}{2\bar{r}} \quad (3.23)$$

Un exemple typique est un amas globulaire composé de 100 000 étoiles dont la masse de chacune est en moyenne la moitié de celle du Soleil et dont le rayon moyen est de 5 parsecs (1pc=206 265 ua). On trouve alors que la dispersion des vitesses est de 22,5 km/s.

3.3.2 Dynamique stellaire sans rencontre : Equations de Boltzmann

A chaque instant donné t , chaque étoile k est définie par sa position $\vec{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$, sa vitesse $\vec{v}_k = (u_k, v_k, w_k)$ et sa masse m_k . Cette étoile est donc représentée par un point $(x_k, y_k, z_k, u_k, v_k, w_k, m_k)$ dans l'espace des phases à 7 dimensions. Un système de N étoiles est représentée par un nuage de N points. On utilise la notion de densité dans l'espace des phases. Celle-ci remplace la notion de trajectoires dans l'espace à 3 dimensions que l'on utilise en mécanique. On définit alors la fonction de distribution $\psi(\vec{r}, \vec{v}, m, t)$ comme la densité des particules dans l'espace des phases. La densité dans l'espace physique à 3 dimensions est

$$\rho(x, y, z, t) = \int_0^{+\infty} m dm \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi dudvdw \quad (3.24)$$

Remarque : la densité ainsi définie est une densité "lissée" puisque la densité réelle est nulle autour de chaque étoile.

Avec cette densité, on obtient le potentiel gravitationnel (lissé) :

$$U(X, Y, Z) = K \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(x, y, z)}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}} dx dy dz \quad (3.25)$$

Pour éviter les singularités, on utilise généralement l'équation de Poisson qui est obtenue en inversant l'équation précédente (admis) :

$$4\pi K\rho = \nabla^2 U \quad (3.26)$$

En mécanique l'évolution du système est donnée par les équations

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}$$

Ici, dans l'espace à 7 dimensions, l'évolution du système est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u = f_x \\ \frac{dy}{dt} &= v = f_y \\ \frac{dz}{dt} &= w = f_z \\ \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial x} = f_u \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial y} = f_v \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial z} = f_w \\ \frac{dm}{dt} &= 0 = f_m \end{aligned} \quad (3.27)$$

On remarque que

$$\operatorname{div} \vec{f} = 0$$

En fait, tous les termes de cette divergence sont nuls. La divergence de \vec{f} étant nulle, on peut appliquer les techniques de la mécanique des fluides. Le fluide, ici, est incompressible, c'est à dire que les volumes se conservent dans l'espace des phases. A partir de l'équation de continuité

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi \vec{f}) = 0$$

, on obtient l'équation de Boltzmann-Liouville :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial w} = 0 \quad (3.28)$$

A partir de la donnée de la condition initiale $\psi(\vec{r}, \vec{v}, m, 0)$, les équations (3.24), (3.26) et (3.28) permettent, en général, de calculer l'évolution du système.

Chapitre 4

Le mouvement képlérien

4.1 Résolution du problème de Képler

Nous allons utiliser les intégrales du mouvement pour trouver les trajectoires de l'équation (2.5). Ces intégrales sont connues par "invariance de moment cinétique", "intégrale de l'énergie" et "intégrale de Laplace". Les deux premières ont déjà été vues en Sect.2.2

*

Avec l'équation de Képler (2.5) et l'intégrale du moment cinétique (2.6), on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{G}\right) &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \wedge \vec{G} \\ &= -\mu\frac{\vec{r}}{r^3} \wedge \left(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}\right)\end{aligned}$$

En remarquant que $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{dr}{dt}\frac{\vec{r}}{r} + r\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{G}\right) &= -\mu\frac{\vec{r}}{r^3} \wedge \left(\vec{r} \wedge \left(\frac{dr}{dt}\frac{\vec{r}}{r} + r\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\right)\right) \\ &= -\mu\frac{\vec{r}}{r^2} \wedge \left(\vec{r} \wedge \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\right)\end{aligned}$$

Or on sait que $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$ et comme $\frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$ (la norme de $\frac{\vec{r}}{r}$ est constante), il reste :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{G}\right) = \mu\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

c'est à dire :

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{G}} - \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e} \quad (\text{cste}) \quad \text{intégrale de Laplace} \quad (4.1)$$

Sur les trois constantes scalaires de ce vecteur une seule est arbitraire car il existe 2 relations qui lient \vec{e} aux intégrales précédentes. La première indique simplement que \vec{e} doit nécessairement appartenir au plan du mouvement car $\vec{e} \cdot \vec{G} = 0$. La deuxième le lie à h , en effet :

$$\vec{e} \cdot \vec{e} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{G} \right)^2 - 2 \frac{\vec{r}}{r} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{G} \right) + 1$$

on a ainsi :

$$e^2 - 1 = \frac{v^2 G^2}{\mu^2} - \frac{2}{r\mu} (\vec{G} \cdot (\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt})) = h \frac{2G^2}{\mu^2}$$

, d'où la relation :

$$h = (e^2 - 1) \frac{\mu^2}{2G^2}$$

Ainsi le seul paramètre arbitraire est celui qui caractérise l'orientation de \vec{e} dans le plan du mouvement.

Si on calcule $\vec{e} \cdot \vec{r}$, on a :

$$\frac{\vec{r} \cdot (\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{G})}{\mu} - \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e} \cdot \vec{r} \quad \text{ou encore} \quad \frac{(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}) \cdot \vec{G}}{\mu} - r = \vec{e} \cdot \vec{r}$$

on obtient :

$$r + \vec{e} \cdot \vec{r} = \frac{G^2}{\mu} \quad (4.2)$$

remarque : si $G = 0$ alors (4.1) donne simplement $\vec{e} = -\frac{\vec{r}}{r}$. Le mouvement est donc rectiligne et porté par \vec{e} et (4.2) est seulement une identité.

Si $G \neq 0$ et si $e \neq 0$, la direction de \vec{e} représente la direction pour laquelle r est minimum. Ce point de minimum de distance est appelé péricentre (ou périhélie si le point O est le Soleil, pégigée si O est la Terre, ...).

Nous allons prendre cette direction particulière comme premier axe d'un nouveau repère orthonormé. Soit le repère $(O\vec{u}_0, \vec{v}_0, \frac{\vec{G}}{G})$ avec $\vec{u}_0 = \frac{\vec{e}}{e}$ et $\vec{v}_0 = \frac{\vec{G}}{G} \wedge \vec{u}_0$. $(O\vec{u}_0\vec{v}_0)$ représente le plan du mouvement. Si on note par W l'angle entre \vec{u}_0 et \vec{r} , (r, W) sont les

coordonnées polaires de M dans $(O\vec{u}_0\vec{v}_0)$ et (4.2) devient :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos W} \quad \text{avec } p = G^2/\mu \quad (4.3)$$

qui est l'équation d'une conique de foyer O , de paramètre p , d'excentricité e , d'axe de symétrie (Ou_0) .

4.2 Les mouvements elliptiques, paraboliques et hyperboliques

En coordonnées polaires dans un repère $(O\vec{u}_0\vec{v}_0)$ où $(O\vec{u}_0)$ est la direction du péri-centre on a la formule (4.3) que l'on rappelle :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos W} \quad \text{avec } p = G^2/\mu$$

W est appelée anomalie vraie.

On a bien évidemment :

$$1 - e \leq 1 + e \cos W \leq 1 + e$$

Il faut donc discuter suivant la nature de la conique.

– Si $e < 1$, la trajectoire est une ellipse (si $e = 0$, c'est un cercle et $(O\vec{u}_0)$ est choisi arbitrairement) et :

$$r_m = \frac{p}{1 + e} \leq r \leq r_M = \frac{p}{1 - e}$$

Ainsi r_m est atteint pour $W = 0$, et r_M pour $W = \pi$. Si on note $2a$ la distance entre le péri-centre et l'apocentre, $2a = r_m + r_M$ (a est appelé le demi-grand axe) et on a

$$\begin{aligned} p &= a(1 - e^2) \\ r_m &= a(1 - e) \\ r_M &= a(1 + e) \end{aligned} \quad (4.4)$$

– Si $e > 1$, la trajectoire est une hyperbole et on a :

$$0 \leq 1 + e \cos W \leq 1 + e$$

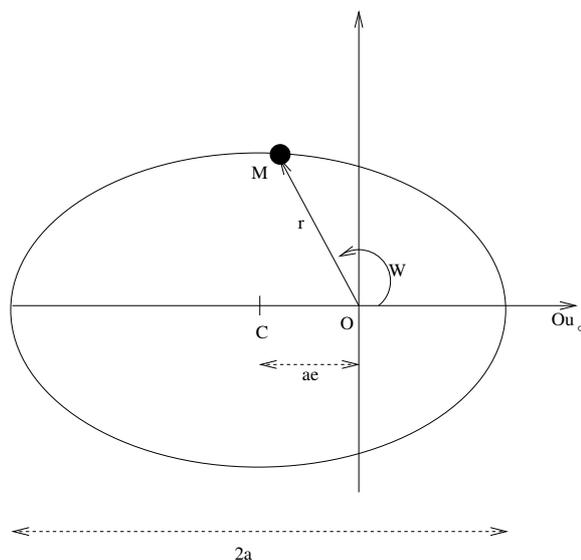


FIG. 4.1 – Ellipse du mouvement képlérien

et donc :

$$\frac{p}{1+e} \leq r (\leq +\infty)$$

La limite ∞ correspond à $1 + e \cos W = 0$, c'est à dire quand W tend vers l'angle $W_\infty = +\arccos(-1/e)$ ou vers l'angle $-W_\infty$. On utilisera plutôt l'angle δ , appelé angle de déviation puisqu'il correspond à la déviation angulaire d'un corps qui a mouvement (presque) rectiligne et uniforme et qui retourne, après avoir interagit avec un autre corps, sur un autre mouvement (presque) rectiligne et uniforme. δ est lié à W_∞ par $\delta = \pi - 2(\pi - W_\infty)$, soit :

$$\delta = 2W_\infty - \pi \quad (4.5)$$

La branche de l'hyperbole en pointillés serait la courbe parcourue par M si p était négatif, c'est à dire si $\mu < 0$ (répulsion). On peut encore noter $2a$ la distance entre le péricentre et "l'apocentre" (ici le symétrique du péricentre par rapport à C), d'où

$$2a = -\frac{p}{1-e} - \frac{p}{1+e} = \frac{p(1+e) + p(1-e)}{e^2 - 1}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} p &= a(e^2 - 1) \\ r_m &= a(e - 1) \end{aligned} \quad (4.6)$$

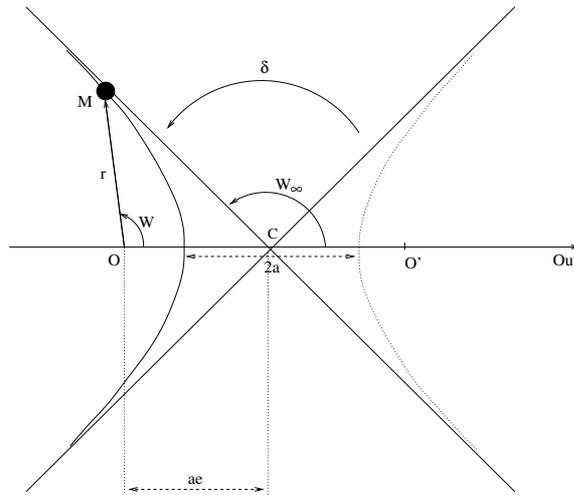


FIG. 4.2 – Hyperbole du mouvement képlérien

- Si $e = 1$, la trajectoire est une parabole on a $\frac{p}{2} \leq r (\leq +\infty)$. On ne peut définir dans ce cas de demi-grand axe. La parabole est un cas limite entre l’ellipse et l’hyperbole. On peut se la représenter mentalement comme une ellipse dont le deuxième foyer (et donc l’apocentre ou même le centre C) est rejeté à l’infini¹.

On a vu que $h = (e^2 - 1)\mu/p$, d’où :

$$\left\| \begin{array}{ll} h = -\frac{\mu}{2a} & \text{pour le cas elliptique} \\ h = 0 & \text{pour le cas parabolique} \\ h = +\frac{\mu}{2a} & \text{pour le cas hyperbolique} \end{array} \right. \quad (4.7)$$

C’est donc le signe de h qui caractérise la nature de la conique et $|h|$ caractérise sa taille. Cette formule (4.7) est importante car avec l’intégrale de l’énergie (2.7), elles permettent de résoudre très facilement quelques petits problèmes comme ceux liés aux calculs de la vitesse de libération, la vitesse circulaire.

On a ainsi vu 5 constantes arbitraires :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{G} & (3) \\ h & (1) \\ \text{direction de}(Ou_0) & (1) \end{array} \right. \quad \text{ou si } G \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{direction de } \vec{G} & (2 \text{ angles}) \\ a & (1) \\ e & (1) \\ \text{direction de}(Ou_0) & (1) \end{array} \right.$$

¹Réciproquement, on peut aussi imaginer une “hyperbole limite” même si c’est plus difficile. Le deuxième foyer est rejeté à l’infini et donc aussi la deuxième branche. W_∞ tend vers π mais le centre C étant rejeté à l’infini, cela “donne” une branche parabolique de direction asymptotique (Ou_0) .

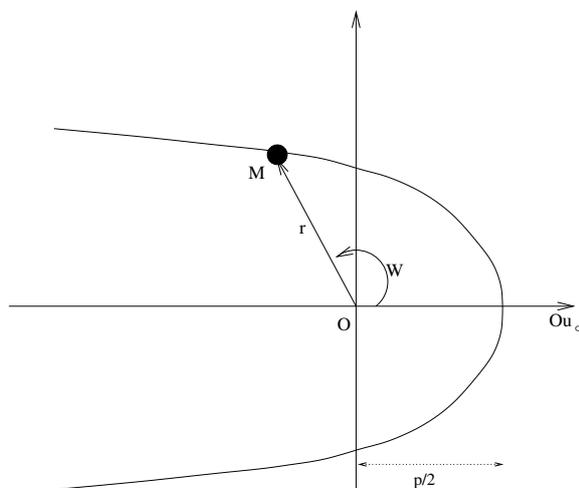


FIG. 4.3 – Parabole du mouvement képlérien

La sixième constante arbitraire est issue du mouvement sur la trajectoire que nous allons voir dans les sections suivantes.

4.3 Mouvement sur la trajectoire dans le cas elliptique

Par (4.3) et (4.4), la trajectoire est définie par :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos W} \text{ avec } e < 1$$

, et le mouvement sur la trajectoire est donné par la loi des aires :

$$r^2 dW = G dt \text{ où } G^2 = \mu p = a(1 - e^2)\mu$$

En définissant t_p comme étant l'instant de passage au péricentre (ie : en $t = t_p$, $W = 0$), on obtient :

$$\int_0^W r^2 dW = G(t - t_p)$$

soit encore :

$$I = \int_0^W \frac{dW}{(1 + e \cos W)^2} = [a(1 - e^2)]^{-3/2} \sqrt{\mu} (t - t_p)$$

Calculons I . Pour ramener l'expression à celle d'une fraction rationnelle, on doit po-

ser :

$$X = \tan \frac{W}{2} \quad , \quad \text{d'où}$$

$$\frac{dW}{dX} = \frac{2}{1+X^2} \quad \text{et} \quad \cos W = \frac{1-X^2}{1+X^2}$$

On obtient donc² :

$$I = \int_0^X \frac{2(1+X^2)dX}{[(1+X^2) + e(1-X^2)]^2}$$

Pour intégrer une fraction rationnelle, il est souvent judicieux de la décomposer en éléments simples. Celle-ci est déjà un élément "simple" car l'expression dans le crochet $(1-e)X^2 + (1+e)$ est non nul. On pose donc

$$Y^2 = \frac{1-e}{1+e}X^2 \quad \text{afin que le crochet devienne} \quad (1+e)(1+Y^2)$$

Puisque

$$YdY = \frac{1-e}{1+e}XdX \quad \text{et} \quad 1+X^2 = 1 + \frac{1+e}{1-e}Y^2$$

, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^Y \frac{2[(1-e) + (1+e)Y^2]}{(1-e)(1+e)^2(1+Y^2)^2} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \frac{1+e}{1-e} dY \\ &= \frac{2}{(1-e)^{3/2}(1+e)^{3/2}} \left[\int_0^Y \frac{dY}{1+Y^2} - e \int_0^Y \frac{1-Y^2}{(1+Y^2)^2} dY \right] \end{aligned}$$

Il suffit de poser $Y = \tan \frac{E}{2}$ pour avoir simplement :

$$I = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \left[\int_0^E dE - e \int_0^E \cos E dE \right]$$

On a ainsi :

$$a^{-3/2} \sqrt{\mu}(t - t_p) = E - e \sin E$$

Il est commode de poser

$$n = a^{-3/2} \sqrt{\mu} \quad \text{et} \quad M = n(t - t_p)$$

M est un angle et n une vitesse angulaire appelée moyen mouvement. En un instant $t + \frac{2\pi}{n}$,

²Mathématiquement la notation $\int_0^X f(X)dX$ n'a pas de sens. Il faudrait utiliser une autre notation pour le X de l'une des deux bornes de l'intégrale ce qui alourdirait beaucoup les notations.

M augmente de 2π . Or $M = E - e \sin E$, donc E augmente de 2π . Et puisque $\tan \frac{W}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$, W augmente aussi de 2π . On en déduit que r est périodique de W , E et M de période 2π . De plus W , E et M s'annulent en même temps en $t = t_p$. Le mouvement est périodique de période $T = \frac{2\pi}{n}$ et on a la troisième loi de Képler :

$$n^2 a^3 = \mu \text{ ou } \frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} \quad (4.8)$$

En résumé :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad r &= \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos W} && W \text{ est l'anomalie vraie} \\ \text{(b)} \quad \tan \frac{W}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} && E \text{ est l'anomalie excentrique} \\ \text{(c)} \quad M &= n(t - t_p) && M \text{ est l'anomalie moyenne} \\ \text{(d)} \quad n^2 a^3 &= \mu \\ \text{(e)} \quad M &= E - e \sin E && \underline{\text{équation de képler}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

De cette manière si les éléments d'orbite sont donnés³ et si μ est donné alors, à une date t , on calcule :

M par (c), n étant donné par (d)

E en résolvant l'équation de Képler (e)

W par (b)

r par (a)

Au lieu de calculer r et W , on peut vouloir les coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} x &= r \cos W \\ y &= r \sin W \end{aligned}$$

ainsi que $\frac{dx}{dt}$
 $\frac{dy}{dt}$.

$$\cos W = \frac{1 - X^2}{1 + X^2} = \frac{1 - \frac{1+e}{1-e} Y^2}{1 + \frac{1+e}{1-e} Y^2} = \frac{(1-e) - (1+e)Y^2}{(1-e) + (1+e)Y^2} = \frac{(1-Y^2) - e(1+Y^2)}{(1+Y^2) - e(1-Y^2)}$$

³soit la position du plan de l'orbite, la direction du périastre, l'excentricité, le demi-grand axe et t_p .

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \\
\sin W &= \frac{2X}{1 + X^2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{Y}{1 + \frac{1+e}{1-e} Y^2} \\
&= \sqrt{1-e^2} \frac{2Y}{(1-e) + (1+e)Y^2} = \sqrt{1-e^2} \frac{2Y}{(1+Y^2) - e(1-Y^2)} \\
&= \sqrt{1-e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E} \\
1 + e \cos W &= \frac{(1 - e \cos E) + (e \cos E - e^2)}{1 - e \cos E} \Rightarrow r = a(1 - e \cos E)
\end{aligned}$$

On déduit donc $\frac{x}{y}$. De plus on a :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dM} \frac{dM}{dt} = n(1 - e \cos E)^{-1} = \frac{na}{r}$$

On peut donc en déduire :

$$\begin{aligned}
r \frac{dx}{dt} &= ra \frac{dE}{dt} (-\sin E) = -na^2 \sin E \\
r \frac{dy}{dt} &= ra \sqrt{1-e^2} \frac{dE}{dt} \cos E = na^2 \sqrt{1-e^2} \cos E
\end{aligned}$$

Rassemblons ces formules :

$$\begin{aligned}
r &= a(1 - e \cos E) \\
\frac{dE}{dt} &= \frac{na}{r} \\
x &= r \cos W = a(\cos E - e) \\
y &= r \sin W = a\sqrt{1-e^2} \sin E \\
r \frac{dx}{dt} &= -na^2 \sin E \\
r \frac{dy}{dt} &= na^2 \sqrt{1-e^2} \cos E
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Ces formules permettent d'interpréter géométriquement l'angle E (fig.4.4). Une ellipse est déduite de son cercle principal $C(c, a)$ par une affinité de rapport $\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}$ perpendiculaire au grand axe. On peut aussi remarquer que, si on limite à l'ordre 1 en e , on obtient $\frac{x}{y} = \frac{a(\cos E - e)}{a \sin E}$. Ainsi, pour de petites excentricités, l'ellipse pourra être vue comme un cercle excentré, c'est à dire dont le centre est à la distance ae de O .

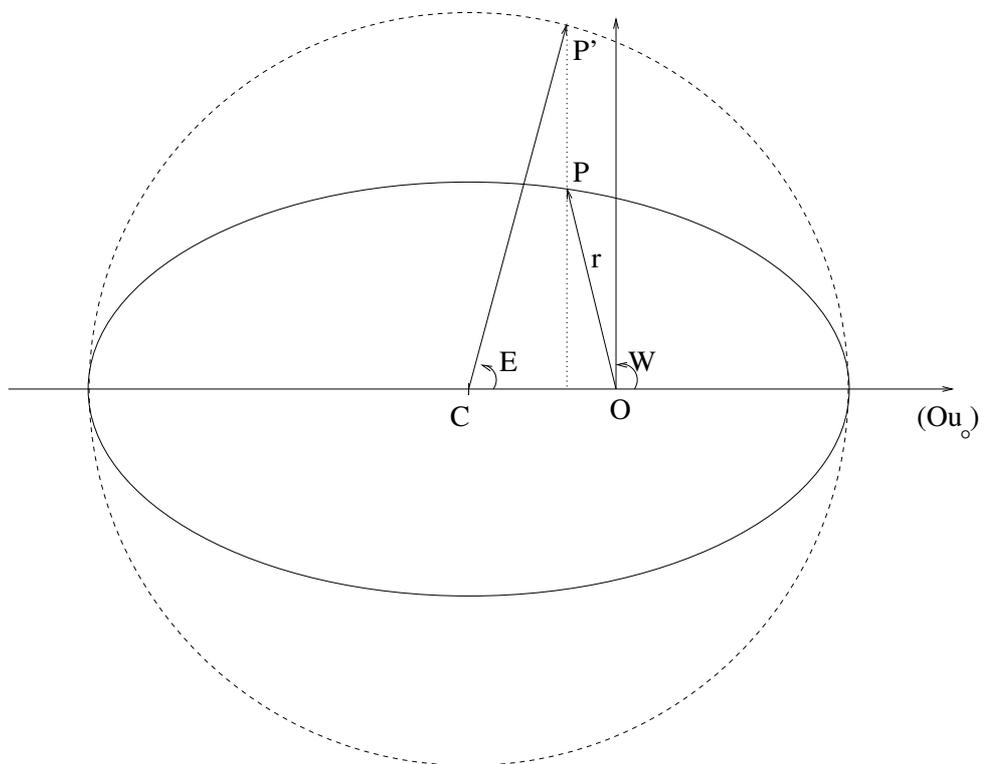


FIG. 4.4 – L'ellipse déduite de son cercle principal

4.4 Mouvement sur la trajectoire dans le cas général

La méthode que l'on vient de voir pour obtenir le mouvement sur la trajectoire est assez naturelle puisqu'elle utilise la loi des aires :

$$\int_0^W r^2 dW = G(t - t_p) \text{ avec } G = \sqrt{\mu p}$$

, avec $p = a|1 - e^2|$ sauf dans le cas parabolique (puisque $e = 1$ et a est infini). Cela suppose cependant que G est non nul et on pourrait reprendre la méthode exposée en Sect.4.3 en adaptant les changements de variables $W \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow E$ pour le cas hyperbolique. Il est en fait préférable de traiter simultanément tous les cas en effectuant une régularisation du problème de Képler (2.5).

Etablissons tout d'abord l'équation en r en projetant le problème de Képler sur la direction de \vec{r} . Il est alors utile de poser

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$

et on remarque que l'on a $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$, et donc en dérivant successivement :

$$\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \text{ et } \vec{u} \cdot \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} + \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$$

Le membre de gauche du problème de Képler s'écrit alors :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \vec{u} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} \vec{u} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{u}}{dt} + r \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} \right) \cdot \vec{u} = \frac{d^2r}{dt^2} + r \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} \cdot \vec{u} = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)^2$$

Et avec son membre de droite :

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

On élimine $\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)^2$ en utilisant l'intégrale de l'énergie (2.7) :

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \vec{u} + r \frac{d\vec{u}}{dt} \right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h$$

et donc

$$r \frac{d^2r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{\mu}{r} + 2h \quad (4.11)$$

On peut alors faire la régularisation en $r = 0$ par le changement de variables :

$$dt = r ds \quad (4.12)$$

On obtient alors facilement :

$$\frac{d^2r}{ds^2} - 2hr = \mu \quad (4.13)$$

C'est donc une simple équation différentielle linéaire à coefficients constants avec second membre.

Ne faisant pas intervenir G , elle est valable pour tout type de mouvement et notamment les mouvements rectilignes où r peut devenir nul (c'était d'ailleurs l'objet de la régularisation (4.12)).

Les solutions sont :

– pour $h < 0$

$$r = -\frac{\mu}{2h} + A \cos \sqrt{-2h}s + B \sin \sqrt{-2h}s$$

– pour $h = 0$

$$r = A + Bs + \frac{\mu}{2}s^2$$

– pour $h > 0$

$$r = -\frac{\mu}{2h} + A \cosh \sqrt{2h}s + B \sinh \sqrt{2h}s$$

A et B sont des constantes d'intégration. Or nous connaissons déjà 5 constantes d'intégration : les 3 scalaires de \vec{G} , h et un scalaire pour la direction de \vec{e} . Ainsi sur les 2 constantes A et B , une seule est indépendante des autres. Par ailleurs, on préférera utiliser comme en Sect.(4.3) l'instant de passage au péricentre t_p , c'est à dire en $t = t_p$, $W = 0$. C'était ce que nous avons défini dans le cas elliptique. Cette définition est valable aussi pour les cas hyperbolique et parabolique mais elle ne vaut pas dans le cas rectiligne. Par contre, on peut toujours dire que t_p représente l'instant de passage au minimum de distance

qui, dans le cas rectiligne, correspond à $r = 0$ ⁴

Explicitons le changement de variables $t \rightarrow s$, en disant qu'à l'instant t_p on a $s = 0$:

$$t - t_p = \int_0^s r ds \quad (4.14)$$

Les conditions initiales de (4.13) sont ($t = t_p$ ou $s = 0$) :

$$r(0) = \frac{p}{1+e} = q \quad \text{et} \quad \frac{dr}{ds}(0) = r \frac{dr}{dt}(t_p) = 0$$

On obtient ainsi

$$A = q + \frac{\mu}{2h} \quad \text{et} \quad B = 0$$

sauf dans le cas parabolique où

$$A = q \quad \text{et} \quad B = 0$$

Les solutions s'écrivent alors :

pour $h < 0$

On pose $a = -\frac{\mu}{2h}$; $E = \sqrt{-2hs}$ et puisque $p = a(1 - e^2) = q(1 + e)$:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (4.15)$$

En posant $n = \frac{\sqrt{-2h}}{a}$ et $M = n(t - t_p)$, l'intégration de (4.14) donne

$$M = E - e \sin E \quad (4.16)$$

Pour repérer le point M dans le cas non rectiligne, il faut connaître W . Or on l'a par (4.3) et (4.15) :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos W} = a(1 - e \cos E)$$

Pour reprendre les notations de la section (4.3), on pose

$$X = \tan \frac{W}{2} \quad \text{et} \quad Y = \tan \frac{E}{2}$$

⁴La régularisation effectuée nous permet de passer sur cette dégénérescence.

On trouve alors facilement que

$$\tan \frac{W}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

On retrouve bien :

$$\begin{aligned} x &= r \cos W = a(\cos E - e) \\ y &= r \sin W = a\sqrt{1-e^2} \sin E \\ r \frac{dx}{dt} &= -na^2 \sin E \\ r \frac{dy}{dt} &= na^2 \sqrt{1-e^2} \cos E \end{aligned} \quad (4.17)$$

, et toujours la troisième loi de Képler

$$n^2 a^3 = \mu \quad (4.18)$$

pour $h > 0$

On pose $a = \frac{\mu}{2h}$; $E = \sqrt{2hs}$ et puisque $p = a(e^2 - 1) = q(1 + e)$:

$$r = a(e \cosh E - 1) \quad (4.19)$$

En posant $n = \frac{\sqrt{2h}}{a}$ et $M = n(t - t_p)$, l'intégration de (4.14) donne

$$M = e \sinh E - E \quad (4.20)$$

Pour repérer le point M dans le cas non rectiligne, il faut connaître W . Or on l'a par (4.3) et (4.19) :

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos W} = a(e \cosh E - 1)$$

On en tire

$$\cos W = \frac{e - \cosh E}{e \cosh E - 1}$$

Comme pour le cas elliptique, on pose

$$X = \tan \frac{W}{2} \quad \text{et} \quad Y = \tanh \frac{E}{2}$$

On rappelle qu'alors $\cosh E$ est égal à $\frac{1+Y^2}{1-Y^2}$. Ainsi

$$\frac{e - \cosh E}{e \cosh E - 1} = \frac{e - \frac{1+Y^2}{1-Y^2}}{e \frac{1+Y^2}{1-Y^2} - 1} = \frac{e - eY^2 - 1 - Y^2}{e + eY^2 - 1 + Y^2} = \frac{(e-1) - (1+e)Y^2}{(e-1) + (1+e)Y^2} = \frac{1 - \frac{1+e}{e-1}Y^2}{1 + \frac{1+e}{e-1}Y^2}$$

Comme $\cos W = \frac{1-X^2}{1+X^2}$, on a $X^2 = \frac{1+e}{e-1}Y^2$ et donc

$$\tan \frac{W}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{e-1}} \tanh \frac{E}{2}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} x &= r \cos W = a(e - \cosh E) \\ y &= r \sin W = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh E \\ r \frac{dx}{dt} &= -na^2 \sinh E \\ r \frac{dy}{dt} &= na^2 \sqrt{e^2 - 1} \cosh E \end{aligned} \quad (4.21)$$

, et toujours la troisième loi de Képler

$$n^2 a^3 = \mu \quad (4.22)$$

pour $h = 0$

On a avec $p = q(1 + e) = 2q$:

$$r = \frac{\mu}{2}s^2 + \frac{p}{2} \quad (4.23)$$

, et l'intégration de (4.14) donne

$$t - t_p = \frac{p}{2}s + \frac{\mu}{6}s^3 \quad (4.24)$$

Pour repérer le point M dans le cas non rectiligne, il faut connaître W . Or on l'a par (4.3) et (4.23) :

$$r = \frac{p}{1 + \cos W} = \frac{\mu}{2}s^2 + \frac{p}{2}$$

On pose encore

$$X = \tan \frac{W}{2}$$

On trouve alors facilement que

$$\tan \frac{W}{2} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}s$$

On trouve :

$$\begin{aligned} x &= r \cos W = \frac{1}{2}(p - \mu s^2) \\ y &= r \sin W = \sqrt{\mu p} s \\ r \frac{dx}{dt} &= -\mu s \\ r \frac{dy}{dt} &= \sqrt{\mu p} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Pour retrouver une forme un peu semblable au cas précédents, on peut poser $n = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}$ et $M = n(t - t_p)$:

$$r = \frac{p}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{W}{2} \right)$$

$$M = \frac{1}{2} \tan \frac{W}{2} + \frac{1}{6} \tan^3 \frac{W}{2}$$

On appelle cette dernière expression l'équation de Barker.

Chapitre 5

Eléments d'orbite et éphémérides

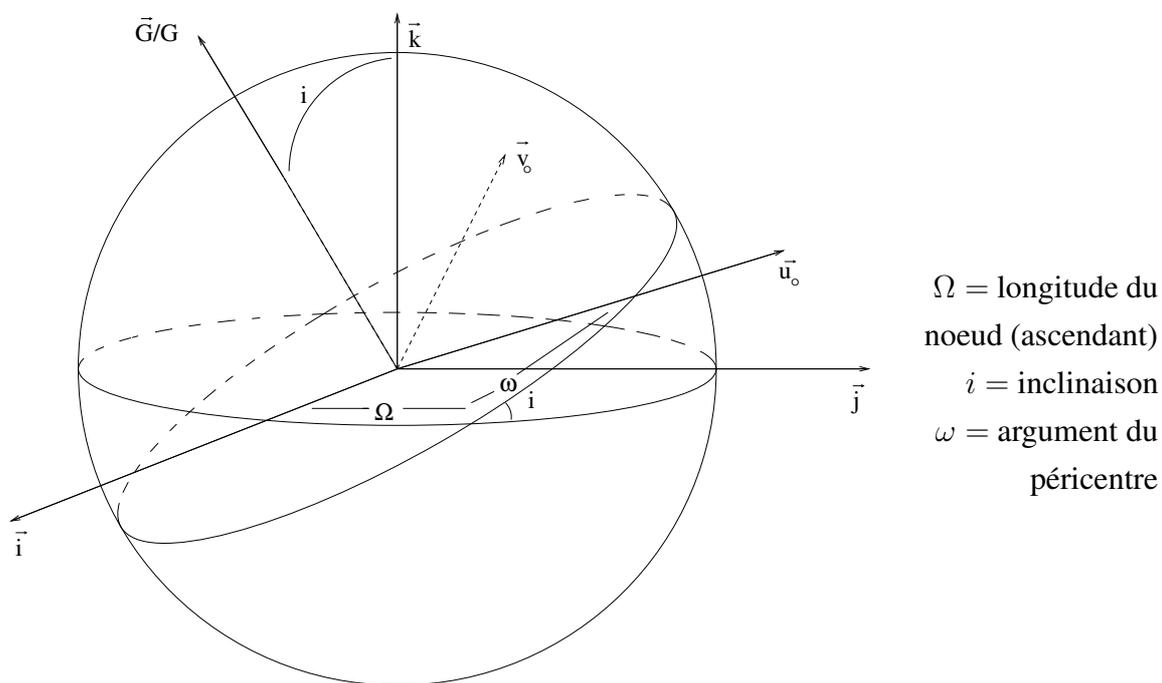
5.1 Les constantes d'intégration

L'intégration du problème képlérien a fait apparaître 6 constantes arbitraires en plus du paramètre μ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{G} \quad (3) \\ \vec{e} \quad (2) \\ t_p \quad (1) \end{array} \right. \text{ ou si } e \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} \vec{G} \quad (3) \\ h \text{ ou } a \quad (1) \\ \vec{e}/e \quad (1) \\ t_p \quad (1) \end{array} \right. \text{ ou si } G \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} \vec{G}/G \quad (2) \\ \vec{e}/e \quad (1) \\ h \text{ ou } a \quad (1) \\ e \quad (1) \\ t_p \quad (1) \end{array} \right.$$

On a vu que $R = (O\vec{u}_0, \vec{v}_0, \frac{\vec{G}}{G})$ est le repère propre de la trajectoire. Il faut repérer R par rapport au repère extérieur indépendant $\mathfrak{R}_O = (Oijk) = (Oxyz)$. Cela peut se faire par les classiques angles d'Euler¹ : Ω, i, ω

¹Les angles d'Euler sont issues de la succession de rotations dans "l'ordre 313", c'est à dire une rotation de Ω autour du troisième axe, puis une rotation de i autour du (nouveau) second axe et une rotation de ω autour du (nouveau) troisième axe. On aurait pu imaginer d'autres successions mais celle définissant les angles d'Euler est la plus utilisée.



Ces trois angles dépendent évidemment du choix de \mathfrak{R}_0 . Il se peut que $i = 0^\circ$, dans ce cas Ω n'est pas défini ainsi que ω . Plus généralement, si i est petit, Ω et ω sont mal déterminés. Pour éviter ce problème on utilise plutôt

$$\varpi = \Omega + \omega \text{ longitude du péricentre} \quad (5.1)$$

De la même manière si e est petit W , E et M sont mal déterminés. C'est pourquoi on utilise :

$$\begin{aligned} l &= \varpi + W && \text{longitude vraie} \\ F &= \varpi + E && \text{longitude excentrique} \\ \lambda &= \varpi + M && \text{longitude moyenne} \end{aligned} \quad (5.2)$$

A la place de t_p , lui aussi mal défini si e est petit, on utilise $\lambda_0 = \lambda(t_0)$, où t_0 est une date origine choisie arbitrairement (par exemple : $t_0 = J2000$ c'est à dire le 1 janvier 2000 à 12h).

5.2 Les éléments d'orbite

On considère souvent les éléments d'orbite suivant :

$$(a, e, i, \Omega, \varpi, \lambda_0)$$

ou encore

$$(a, z, \zeta, \lambda_0)$$

où

$$z = e \exp \sqrt{-1} \varpi \quad \text{et} \quad \zeta = \sin \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1} \Omega$$

Ces variables complexes ont l'avantage d'être régulières. En effet si e est nul, ϖ n'est pas définie mais les deux coordonnées cartésiennes le sont puisque $z = 0$ (de même avec ζ). C'est : pourquoi, il revient au même d'utiliser les coordonnées cartésiennes correspondantes :

$$(a, k, h, q_x, p_x, \lambda_0)$$

où

$$k = e \cos \varpi, \quad h = e \sin \varpi \quad \text{et} \quad q_x = \sin \frac{i}{2} \cos \Omega, \quad p_x = \sin \frac{i}{2} \sin \Omega$$

Le tableau (5.1) donne les éléments moyens des orbites héliocentriques des principales planètes du système solaire, rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens J2000 et pour la date $t_0 = \text{J2000}$.

5.3 Unités utilisées en astronomie

Les mouvements elliptiques képlériens que l'on vient de voir permettent de relier les trois grandeurs physiques de longueur, de temps et de masse. Cela se fait principalement avec la troisième loi de Képler :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} \quad \text{où} \quad \mu = KM \text{ ou } K(M + m) \dots$$

Il est donc nécessaire de connaître la constante de gravitation universelle K . Or, en astronomie, on ne mesure bien que le temps et les distances et K est mal connu en mètre (m), kilogramme (kg) et seconde (s). Par exemple, l'étude de la trajectoire des satellites

TAB. 5.1 – Eléments moyens des orbites héliocentriques des principales planètes du système solaire, rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens J2000 et pour la date $t_0 = \text{J2000}$.

	a ua	e	i °	Ω °	ϖ °	λ_0 °	n "/jour
Mercury	0,38710	0,2056	7,00	48,33	77,46	252,25	14732,42
Vénus	0,72333	0,0068	3,39	76,68	131,56	181,98	5767,67
Terre	1,00000	0,0167	0,00	-	102,94	100,47	3548,19
Mars	1,52368	0,0934	1,85	49,56	336,06	355,43	1886,52
Jupiter	5,20260	0,0485	1,30	100,46	14,33	34,35	299,128
Saturne	9,55491	0,0555	2,49	113,66	93,06	50,08	120,455
Uranus	19,21845	0,0463	0,77	74,01	173,00	314,05	42,231
Neptune	30,11039	0,0090	1,77	131,78	48,12	304,39	21,534
Pluton	39,44	0,2485	17,13	110,7	224,6	237,7	14,3

artificiels a permis de déterminer

$$KM_T = 398\,600,64 \cdot 10^9 m^3 s^{-2} \text{ où } M_T \text{ est la masse de la Terre}$$

, mais ni K ni M_T n'est connu avec autant de précision. Les meilleures déterminations donnent $K = 6,6720 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$. L'indétermination provient du fait que le kilogramme a une définition "artificielle". En astronomie, on prend comme unité de masse m_\odot la masse du Soleil qui est beaucoup plus naturelle.

Cependant, si pour les mouvements de satellites artificiels les distances sont bien connues en mètres, cela est moins vrai pour les mouvements planétaires. On pose alors par définition :

$$\sqrt{K} = 0,017\,202\,098\,950\,000 \text{ (constante de Gauss)}$$

et on définit l'unité de longueur par :

L'unité astronomique de longueur (ua) est le demi-grand axe de l'orbite autour du Soleil d'une planète de masse négligeable, non perturbée par d'autres planètes, dont le moyen mouvement est égal à la constante de Gauss \sqrt{K} , les unités de masse et de temps étant m_\odot et le jour.

TAB. 5.2 – Inverse de la masse des principales planètes du système solaire. L'unité de masse est la masse du Soleil.

Mercure	6 023 600	Saturne	3498,5
Vénus	408 523,5	Uranus	22 869
Terre + Lune	328 900,5	Neptune	19 314
Mars	3 098 710	Pluton	130 000 000 *
Jupiter	1047,355	Cérès	1 700 000 000

* Avant la découverte de son satellite Charon en 1978 qui a permis d'évaluer correctement la masse de Pluton grâce à la troisième loi de Képler, cette masse était surestimée à 1 / 3 000 000.

Le jour (unité astronomique de temps) correspond à 86 400 s, la seconde étant, elle, définie par les horloges atomiques². On remarquera que la période de ce mouvement fictif, $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} = 365,256\,898\,326\,3$ jours, est proche de l'année. C'est pourquoi l'unité astronomique est proche du demi-grand axe de l'orbite terrestre. Pour la même raison K est proche de $4\pi^2$ ($K = 39,476\,926\,421\,373\,ua^3 \odot^{-1} an^{-2}$ avec $1 an =$ une année julienne $= 365,25$ jours).

A partir des constantes primaires, déterminées par d'autres expériences de la physique,

$$c = 299\,792\,458\,m\,s^{-1} \quad (\text{vitesse de la lumière})$$

$$\tau_A = 499,044\,782\,s \quad (\text{temps de lumière pour l'unité de distance})$$

, on en déduit

$$1\,ua = c\tau_A = 1,495\,978\,70 \cdot 10^{11}\,m$$

Le tableau (5.2) donne les masses des principales planètes du système solaire et le tableau (5.3) celles de quelques uns des satellites de ces planètes.

5.4 Calcul d'éphémérides

Soit, pour μ donné, des éléments d'orbite relatifs à un repère $\mathfrak{R}_0 = (Oxyz)$ et une date origine t_0 :

$$(a, e, i, \Omega, \varpi, \lambda_0)$$

²La raie de transition entre les deux niveaux hyperfins de l'atome de césium à l'état fondamental a une fréquence fixée conventionnellement à 9 192 631 770 hertz.

TAB. 5.3 – Inverse de la masse des principaux satellites de planètes. L'unité de masse est la masse de la planète correspondante.

planète	satellite	$\frac{m_{\text{planète}}}{m_{\text{satellite}}}$	planète	satellite	$\frac{m_{\text{planète}}}{m_{\text{satellite}}}$
Terre	Lune	81,301	Mars	Phobos	50 500 000
				Deimos	360 000 000
Jupiter	Io	21 276,6	Saturne	Mimas	15 800 000
	Europe	39 062,5		Encelade	11 000 000
	Ganymède	12 755,1		Téthys	943 400
	Callisto	17 857,1		Dioné	509 400
Uranus	Miranda	1 300 000	Neptune	Rhéea	231 000
	Ariel	64 000		Titan	4225,86
	Umbriel	74 000		Hypérior	30 000 000
	Titania	24 600		Japet	320 000
	Obéron	28 800		Triton	4780
Pluton	Charon	8,0		Néréide	5 000 000

ou, pour avoir aussi le cas parabolique :

$$(h, p, i, \Omega, \varpi, \lambda_0)$$

pour lesquels on déduit alors e par

$$e = \sqrt{1 + \frac{2hp}{\mu}} \quad (5.3)$$

Le problème est de définir la transformation qui donne, pour toute date t donnée, les composantes dans $\mathfrak{R}_0(x, y, z)$ de la position et $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ de la vitesse d'un point M issu d'un problème képlérien de constante d'attraction μ à partir de ces éléments d'orbites. C'est à dire que l'on cherche à définir le changement de variables :

$$T_{\mu,t} : (a, e, i, \Omega, \varpi, \lambda_0) \rightarrow (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (5.4)$$

Il faut d'abord déterminer $(X, Y, 0)$ et $(\dot{X}, \dot{Y}, 0)$ correspondant à la position et à la vitesse dans le repère $R = (O\vec{u}_0, \vec{v}_0, \frac{\vec{G}}{G})$. Il suffit d'appliquer le formulaire suivant issu du chapitre 4.

orbite hyperbolique ($h > 0$)

$$a = \frac{\mu}{2h} \text{ et } n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (5.5)$$

$$M = \lambda_0 + n(t - t_0) - \varpi \quad (5.6)$$

$$E \text{ par } M = e \sinh E - E \quad (5.7)$$

$$r = a(e \cosh E - 1) \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} X = a(e - \cosh E) \\ Y = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh E \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{X} = -\frac{na^2}{r} \sinh E \\ \dot{Y} = \frac{na^2}{r} \sqrt{e^2 - 1} \cosh E \end{cases} \quad (5.9)$$

orbite parabolique ($h = 0$)

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \quad (5.10)$$

$$M = \lambda_0 + n(t - t_0) - \varpi \quad (5.11)$$

$$E \text{ (égal à } \tan \frac{W}{2}) \text{ par } M = \frac{1}{2}E + \frac{1}{6}E^3 \quad (5.12)$$

$$r = p \frac{1 + E^2}{2} \quad (5.13)$$

$$\begin{cases} X = p \frac{1 - E^2}{2} \\ Y = pE \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{X} = -\frac{np^2}{r} E \\ \dot{Y} = \frac{np^2}{r} \end{cases} \quad (5.14)$$

Si p est nul n n'est pas défini et donc λ_0 non plus ($\lambda_0 = \varpi + n(t_0 - t_p)$). Dans ce cas qui correspond au cas rectiligne parabolique, t_p doit être donné à la place de λ_0 . Le formulaire est alors :

$$s \text{ par } t - t_P = \frac{\mu}{6}s^3 \quad (5.15)$$

$$\begin{cases} X = -\frac{\mu}{2}s^2 \\ Y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{X} = -\frac{2}{s} \\ \dot{Y} = 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

orbite elliptique ($h < 0$)

$$a = -\frac{\mu}{2h} \text{ et } n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (5.17)$$

$$M = \lambda_0 + n(t - t_0) - \varpi \quad (5.18)$$

$$E \text{ par } M = E - e \sin E \quad (5.19)$$

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (5.20)$$

$$\begin{cases} X = a(\cos E - e) \\ Y = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{X} = -\frac{na^2}{r} \sin E \\ \dot{Y} = \frac{na^2}{r} \sqrt{1 - e^2} \cos E \end{cases} \quad (5.21)$$

Ayant la position et la vitesse $\begin{pmatrix} X & \dot{X} \\ Y & \dot{Y} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans le repère R , il reste d'après la figure

de la section (5.1), à appliquer successivement les 3 rotations correspondantes. On obtient ainsi la position et la vitesse de P dans le repère \mathfrak{R} :

$$\begin{pmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \\ z & \dot{z} \end{pmatrix} = \mathfrak{R}_3(-\Omega) \times \mathfrak{R}_1(-i) \times \mathfrak{R}_3(-\omega) \begin{pmatrix} X & \dot{X} \\ Y & \dot{Y} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

où \mathfrak{R}_1 et \mathfrak{R}_3 sont les matrices de rotation autour, respectivement, du premier et du troisième axe, c'est à dire :

$$\mathfrak{R}_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On rappelle que $\omega = \varpi - \Omega$

Cas d'orbites presque circulaires

La plupart des planètes du système solaire et beaucoup de satellites naturels de planètes ont une orbite presque circulaire. Or, on a vu que pour e petit, le péricentre

est mal défini. Dans ce cas il vaut mieux utiliser les longitudes plutôt que les anomalies. On préfère alors définir la transformation suivante :

$$T_{\mu,t}^c : (a, k, h, q_x, p_x, \lambda_0) \rightarrow (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (5.23)$$

n est toujours donné par la troisième loi de Képler, puis

$$\lambda = \lambda_0 + n(t - t_0) \quad (5.24)$$

En utilisant les longitudes, l'équation de Képler s'écrit :

$$\lambda - \varpi = F - \varpi - e \sin(F - \varpi)$$

c'est à dire

$$\lambda = F - e \sin F \cos \varpi + e \cos F \sin \varpi$$

ou encore

$$\lambda = F - k \sin F + h \cos F \quad (5.25)$$

On peut aussi écrire r sous une forme semblable :

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E = 1 - e \cos(F - \varpi) = 1 - e \cos F \cos \varpi - e \sin F \sin \varpi$$

$$\frac{r}{a} = 1 - k \cos F - h \sin F \quad (5.26)$$

Par ailleurs, si le péricentre est mal défini (ou pas défini du tout si $e = 0$), il ne faut pas chercher à écrire la position et la vitesse $\begin{pmatrix} X & \dot{X} \\ Y & \dot{Y} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans le repère $R = (O\vec{u}_0, \vec{v}_0, \frac{\vec{G}}{G})$.

Ecrivons les dans un repère R^c déduit de R par une rotation d'un angle $-\varpi$ autour du troisième axe :

$$\begin{pmatrix} X^c & \dot{X}^c \\ Y^c & \dot{Y}^c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{R}_3(-\varpi) \begin{pmatrix} X & \dot{X} \\ Y & \dot{Y} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{R}_3(-\varpi) \begin{pmatrix} a(\cos E - e) & -\frac{na^2}{r} \sin E \\ a\sqrt{1-e^2} \sin E & \frac{na^2}{r} \sqrt{1-e^2} \cos E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Posons

$$\phi = \sqrt{1 - k^2 - h^2} \quad (5.27)$$

On obtient pour les positions :

$$\begin{aligned} X^c/a &= \cos(F - \varpi) \cos \varpi - e \cos \varpi - \phi \sin \varpi \sin(F - \varpi) \\ Y^c/a &= \cos(F - \varpi) \sin \varpi - e \sin \varpi + \phi \cos \varpi \sin(F - \varpi) \end{aligned}$$

Comme précédemment les formules d'addition donnent :

$$\begin{aligned} X^c/a &= (1 - \sin^2 \varpi + \phi \sin^2 \varpi) \cos F + (1 - \phi) \cos \varpi \sin \varpi \sin F - k \\ Y^c/a &= (1 - \cos^2 \varpi + \phi \cos^2 \varpi) \sin F + (1 - \phi) \cos \varpi \sin \varpi \cos F - h \end{aligned}$$

Il suffit alors de remarquer que

$$(k^2 + h^2) \cos^2 \varpi = k^2 \quad \text{et} \quad (k^2 + h^2) \sin^2 \varpi = h^2$$

$$(k^2 + h^2) \cos \varpi \sin \varpi = kh$$

et que :

$$1 - \phi = \frac{1 - \phi^2}{1 + \phi} = \frac{k^2 + h^2}{1 + \phi} = (k^2 + h^2)\psi$$

avec

$$\psi = \frac{1}{1 + \phi} \tag{5.28}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} X^c/a &= (1 - \psi h^2) \cos F + \psi kh \sin F - k \\ Y^c/a &= (1 - \psi k^2) \sin F + \psi kh \cos F - h \end{aligned}$$

Et avec (5.25) :

$$\begin{aligned} X^c &= a (\cos F - \psi h(\lambda - F) - k) \\ Y^c &= a (\sin F + \psi k(\lambda - F) - h) \end{aligned} \tag{5.29}$$

Selon un schéma identique, on trouve facilement pour les vitesses :

$$\begin{aligned} \dot{X}^c &= \frac{na^2}{r} (-\sin F + \psi h(1 - r/a)) \\ \dot{Y}^c &= \frac{na^2}{r} (\cos F - \psi k(1 - r/a)) \end{aligned} \tag{5.30}$$

Il reste à faire comme précédemment (voir 5.22) les trois rotations adéquates. Puisque $\omega = \varpi - \Omega$, et que les coordonnées ont été mis dans un repère R^c déduit de R par une rotation d'un angle $-\varpi$ autour du troisième axe, la troisième rotation est $\mathfrak{R}_3(\Omega)$. Il faut

donc calculer la matrice de rotation suivante :

$$\mathfrak{R}(q_x, p_x) = \mathfrak{R}_3(-\Omega) \times \mathfrak{R}_1(-i) \times \mathfrak{R}_3(\Omega)$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \Omega + \cos i \sin^2 \Omega & \cos \Omega \sin \Omega (1 - \cos i) & \sin i \sin \Omega \\ \cos \Omega \sin \Omega (1 - \cos i) & \sin^2 \Omega + \cos i \cos^2 \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ -\sin i \sin \Omega & \sin i \cos \Omega & \cos i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or :

$$\cos^2 \Omega + \cos i \sin^2 \Omega = 1 - \sin^2 \Omega + (1 - 2 \sin^2 \frac{i}{2}) \sin^2 \Omega = 1 - 2p_x^2$$

$$\sin^2 \Omega + \cos i \cos^2 \Omega = 1 - \cos^2 \Omega + (1 - 2 \sin^2 \frac{i}{2}) \cos^2 \Omega = 1 - 2q_x^2$$

$$1 - \cos i = 1 - (1 - 2 \sin^2 \frac{i}{2}) = 2q_x^2 + 2p_x^2$$

et donc

$$\cos \Omega \sin \Omega (1 - \cos i) = 2q_x p_x$$

et enfin

$$\sin i = 2 \sin \frac{i}{2} \cos \frac{i}{2} = 2 \sin \frac{i}{2} \sqrt{1 - q_x^2 - p_x^2} = 2 \sin \frac{i}{2} \chi$$

avec

$$\chi = \sqrt{1 - q_x^2 - p_x^2} \quad (5.31)$$

On obtient ainsi :

$$\mathfrak{R}(q_x, p_x) = \begin{pmatrix} 1 - 2p_x^2 & 2p_x q_x & 2p_x \chi \\ 2p_x q_x & 1 - 2q_x^2 & -2q_x \chi \\ -2p_x \chi & 2q_x \chi & 1 - 2q_x^2 - 2p_x^2 \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

et donc

$$\begin{pmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \\ z & \dot{z} \end{pmatrix} = \mathfrak{R}(q_x, p_x) \begin{pmatrix} X^c & \dot{X}^c \\ Y^c & \dot{Y}^c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

On remarquera qu'il n'était pas indispensable ici de calculer la troisième colonne de la matrice $\mathfrak{R}(q_x, p_x)$.

Résolution de l'équation de Képler

Dans chacun des cas que nous venons de voir, il est nécessaire d'inverser l'équation de Képler pour trouver E (ou F). Cette équation est transcendante et il n'existe pas d'expression analytique finie qui donne E en fonction de e et de M : $E = f(e, M)$. L'inversion de l'équation de Képler est un problème en soi de la Mécanique Céleste.

Dans le cas elliptique, une méthode analytique³ consiste à chercher le développement en série de Fourier de la variable M (c'est à dire du temps). Les coefficients de Fourier trouvés sont alors donnés sous forme de séries entières de e . La série de Fourier converge uniformément pour tout $e < 1$. Par contre les séries entières de e qui forment les coefficients de Fourier ne convergent que pour $e < 0,6627434\dots$ A titre indicatif, on trouve :

$$E = M + \left(e - \frac{e^3}{8}\right) \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \frac{3e^3}{8} \sin 3M + \dots \quad (5.34)$$

Numériquement, on utilise souvent la méthode de Newton. L'équation s'écrit sous la forme $g_e(E) - M = 0$ et, dans le cas où $g'_e(E)$ est non nul, on obtient la récurrence suivante :

$$E_{n+1} = E_n - \frac{g_e(E_n) - M}{g'_e(E_n)}$$

On peut initialiser avec $E_0 = M$ ou encore, pour le cas elliptique et e assez petit, avec (5.34).

5.5 Conclusion

On vient d'établir le formulaire qui, à partir des éléments d'orbite et une date donnée, donne la position du corps dans un repère fixe. Il suffit alors d'avoir, à la même date et dans le même repère, la position de la Terre. Les positions de la Terre sont mises à disposition par les différents bureaux d'éphémérides nationaux⁴

³Voir par exemple, le cours "Mécanique Céleste" de L. Duriez à <http://www.univ-lille1.fr/lal>

⁴Parmi ceux-ci, deux seulement fournissent des éphémérides issues de théories du mouvement originales et indépendantes. Il s'agit du "Jet Propulsion Laboratory" (JPL de la NASA,) et l'"Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides" (IMCCE). Ce dernier publie, sous la responsabilité du "Bureau des Longitudes", la "Connaissance des Temps" qui sont des éphémérides précises des principaux corps du système solaire.

En fait il faudrait plutôt avoir la position de l'observateur. La différence entre la position de la Terre et celle de l'observateur est appelée correction de parallaxe terrestre ou correction topocentrique. Elle est généralement très faible car la distance de l'objet considéré est grande devant le rayon de la Terre. Si on voulait atteindre ce niveau de précision, il faudrait alors tenir compte aussi d'autres effets comme la réfraction atmosphérique, l'aberration stellaire (la direction apparente des rayons lumineux est différente de la direction vraie en raison de la vitesse orbitale de la Terre), des effets relativistes ...

Par contre il est indispensable de tenir compte du temps de lumière. Les positions dont on parle ici sont des positions géométriques des astres au même instant t . En fait, la lumière reçue à cet instant correspond à la lumière émise par l'astre P à l'instant $t - \Delta t$. Le temps de lumière Δt est le temps que met la lumière pour aller de P à T . Cela signifie que ce n'est pas le vecteur $\overrightarrow{T(t)P(t)}$ (T est la Terre et P le corps considéré), mais le vecteur $\overrightarrow{T(t)P(t - \Delta t)}$ qui donnera la position de P dans le ciel à la date t .

Enfin si le repère choisi est le repère équatorial (voir le chapitre 1), en passant aux coordonnées sphériques on obtient l'ascension droite (α) et la déclinaison (δ).

Chapitre 6

Trajectoires des missions interplanétaires

Leur principe est une application du problème des 2-corps que l'on appelle "tremplin gravitationnel" ou "assistance gravitationnelle". Cette technique consiste à utiliser la masse d'un gros corps (par exemple Jupiter) pour dévier une trajectoire.

6.1 Principe

Une sonde voyage dans le système solaire suffisamment loin des autres planètes et notamment de Jupiter. Ainsi on suppose que son mouvement est képlérien avec

$$\mu_{\odot} = KM_{\odot} \text{ d'origine } \odot$$

Ensuite, cette trajectoire amène la sonde dans le voisinage de Jupiter. On peut définir une "sphère d'influence" à Jupiter, à l'intérieur de laquelle l'influence du Soleil est (considérée) négligeable par rapport à celle de Jupiter (et inversement à l'extérieur de cette sphère). Dans la description qui suit, il n'est pas nécessaire de définir plus précisément cette sphère¹ car on suppose que la sonde passe très rapidement près de Jupiter de manière à ce que l'on puisse négliger le temps d'interaction avec Jupiter (quelques heures) par rapport au temps de parcours de l'orbite héliocentrique (quelques années). On a donc

¹La notion de sphère d'influence est explicitée au Chap. 3.1. Il reste cependant que la description faite ici est une approximation.

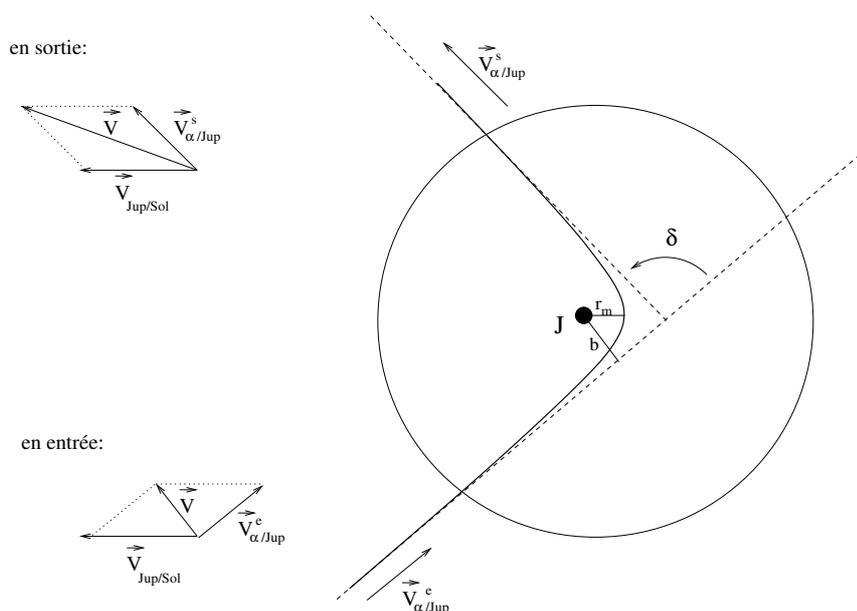


FIG. 6.1 – Principe du tremplin gravitationnel

à l'intérieur de la sphère d'influence un mouvement képlérien hyperbolique avec

$$\mu_J = KM_J \text{ d'origine } J$$

Le mouvement est nécessairement hyperbolique puisque, vue de Jupiter, la sonde “arrive de l'infini” avec une vitesse (à l'infini) non nulle (voir la formule (2.7)).

A la sortie de la sphère d'influence, la vitesse jovicentrique a simplement changé de direction et donc la vitesse héliocentrique a changé (en direction et en module).

6.2 La loi du choc

La formule (4.5) nous donne la déviation de la vitesse jovicentrique (figure 6.1) :

$$\sin \frac{\delta}{2} = \sin\left(\frac{-\pi + 2W_\infty}{2}\right) = -\cos W_\infty = 1/e$$

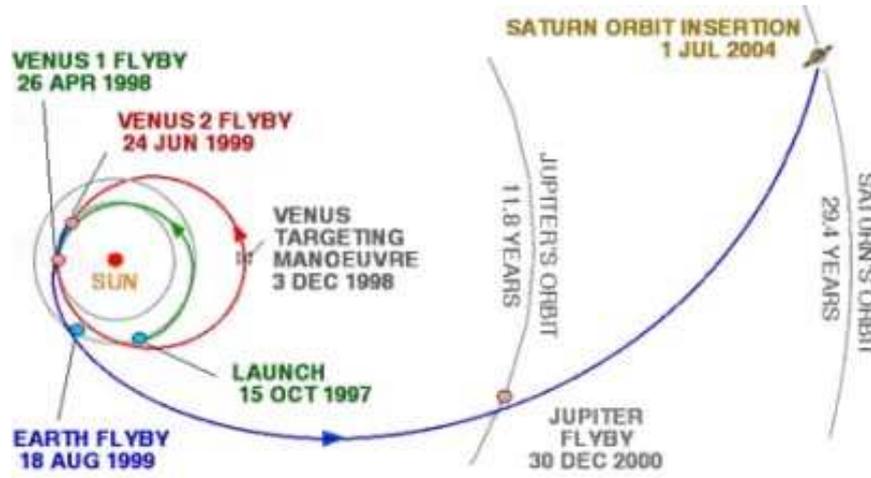


FIG. 6.2 – Trajectoire de la sonde Cassini-Huygens (Crédit : ESA)

Or $h = +\frac{\mu J}{2a} = \frac{V_\infty^2}{2}$ et $r_m = a(e - 1)$. On en déduit :

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + \frac{r_m V_\infty^2}{\mu}} \quad (6.1)$$

Puisque $b = a\sqrt{e^2 - 1}$, on peut aussi écrire :

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + \frac{b^2 V_\infty^4}{\mu_j^2}} \quad (6.2)$$

La figure (6.1) aide à comprendre l'approximation qui est faite ici. Celle-ci consiste à supposer que le mouvement héliocentrique de la sonde juste avant l'interaction avec Jupiter est rectiligne et uniforme (avec la vitesse \vec{V}_∞) ce qui permet de l'assimiler à la première asymptote (de même après l'interaction avec la deuxième asymptote). Cette supposition signifie que le temps d'interaction est très court. C'est en ce sens que le tremplin gravitationnel peut être assimilable à un choc : "instantanément" le vecteur vitesse de la trajectoire est changé. C'est pour cela que l'on parle aussi de "billard" gravitationnel, la loi du changement de vitesse étant donnée ici par (6.1) ou (6.2).

6.3 Les sondes spatiales

La technique du "tremplin gravitationnel" permet ainsi d'ajouter ou de soustraire de l'énergie à l'orbite de la sonde. En général, elle est utilisée pour augmenter la vitesse de la

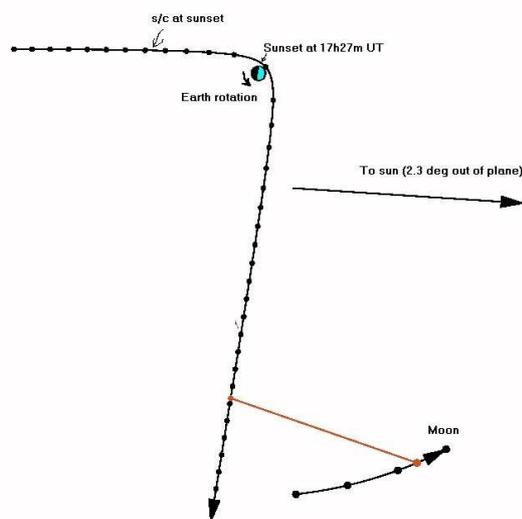


FIG. 6.3 – Le passage de Rosetta près de la Terre le 4 mars 2005 (Crédit : ESA)

sonde et l'envoyer dans les parties éloignées du système solaire. Cela permet de minimiser l'énergie à fournir au départ (et donc minimiser son poids en carburant au décollage !).

Ce mécanisme a été initié lors du "Grand Tour" effectué par les sondes Voyager 1 et 2 : un survol adéquat de Jupiter a permis d'atteindre Saturne puis les autres planètes. Depuis cette technique est utilisée quasi systématiquement : la sonde Galileo a reçu une impulsion de Vénus et deux de la Terre dans ses trajectoires autour du Soleil afin d'atteindre Jupiter. La sonde Cassini-Huygens a reçu deux impulsions de Vénus, une de la Terre et une autre de Jupiter afin d'atteindre enfin Saturne (voir Fig. 6.2).

Galileo a aussi utilisé l'assistance gravitationnelle de Io, l'un de ses satellites, afin de diminuer son énergie et ainsi de se mettre en orbite autour de Jupiter.

Le dernier exemple en date est celui de la figure (6.3). La sonde interplanétaire Rosetta a pour principal objectif une rencontre ("rendezvous" en anglais) et des mesures in-situ de la comète 46 P/Wirtanen. Son orbite assez complexe passe trois fois par la Terre et une fois par Mars.

Les objets naturels du système solaire subissent eux aussi quelque fois des déviations orbitales brusques dues à des passages proches avec une planète. C'est même assez courant pour les comètes puisque leurs orbites très excentriques les amènent à croiser les orbites planétaires.

Chapitre 7

Détermination des éléments d'orbite

Au chapitre 5 on a établi le formulaire qui, à partir des éléments d'orbite et une date donnée, donne la position du corps dans un repère fixe. Il suffit alors d'avoir, à la même date et dans le même repère, la position de la Terre pour avoir la position de l'objet dans le ciel.

Réciproquement on souhaite, par exemple à l'occasion de la découverte d'un nouvel objet, déterminer ses éléments d'orbites à partir de la mesure de ses positions. Les formules établies aux chapitres 4 et 5 permettent de calculer les éléments d'orbites du corps à partir de la connaissance de sa position et de sa vitesse à un instant donné (et à μ donné). Il s'agit de la transformation inverse de (5.4) :

$$T_{\mu,t}^{-1} : (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \rightarrow (a, e, i, \Omega, \varpi, \lambda_0)$$

Cette transformation sera précisée dans ce chapitre cependant l'observation d'un objet dans le ciel ne donne pas directement $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ mais seulement sa direction (par exemple les 2 angles sphériques α et δ). On voit donc déjà qu'il est nécessaire d'avoir 3 observations indépendantes de l'astre observé afin d'avoir 6 coordonnées indépendantes et de pouvoir espérer déterminer les 6 coordonnées de la position-vitesse.

7.1 La méthode de Laplace

Appelons $\overrightarrow{L}(t)$ le vecteur unitaire de la ligne de visée géocentrique de l'objet observé à un instant t

La méthode proposée dans ce paragraphe et appelée "méthode de Laplace" suppose que les observations $\overrightarrow{L}(t_i)$ sont faites depuis la Terre (comme au chapitre ??) à des dates

assez rapprochées. Elle suppose aussi que l'objet observé est sur une orbite héliocentrique képlérienne. La même hypothèse est faite pour la Terre dont le mouvement est supposé connu (les positions sont par exemple issue de la "Connaissance des Temps").

Le principe de la méthode est de déterminer la position-vitesse de l'objet P à partir de la connaissance de \vec{L} , $\dot{\vec{L}}$ et $\ddot{\vec{L}}$ à une date . Ces dernières quantités sont estimées numériquement. En effet, si les dates t_i sont suffisamment proches de t_0 , on peut effectuer un développement de Taylor au voisinage de t_0 :

$$\vec{L}(t_i) = \vec{L}(t_0) + (t_i - t_0)\dot{\vec{L}}(t_0) + \frac{1}{2}(t_i - t_0)^2\ddot{\vec{L}}(t_0) + \dots$$

En tronquant cette expression, on obtient un système de 3 équations ($i = 1, 3$) à trois inconnues vectorielles ($\vec{L}(t_0)$, $\dot{\vec{L}}(t_0)$ et $\ddot{\vec{L}}(t_0)$). Il est facile de voir que son déterminant est non nul si les dates choisies sont distinctes. Par ailleurs, l'erreur due à la troncature est $O(t_i - t_0)^3$. On peut montrer qu'elle en fait d'un ordre supérieur si on choisit t_0 la moyenne arithmétique des t_i .

Appelons $\vec{S}(t)$ le rayon vecteur géocentrique du Soleil à un instant t

Appelons $\vec{r}(t)$ le rayon vecteur héliocentrique de l'astre à un instant t

Appelons $d(t)$ la distance géocentrique de l'astre à un instant t

On a alors à chaque instant t :

$$\vec{r} = d\vec{L} - \vec{S} \quad (7.1)$$

$$\dot{\vec{r}} = d\dot{\vec{L}} + d\dot{\vec{L}} - \dot{\vec{S}} \quad (7.2)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{d}\vec{L} + 2d\ddot{\vec{L}} + d\ddot{\vec{L}} - \ddot{\vec{S}} \quad (7.3)$$

Comme on a supposé que le Soleil et l'astre ont un mouvement képlérien, on a :

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu\frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{et} \quad \ddot{\vec{S}} = -\mu\frac{\vec{S}}{S^3}$$

que l'on substitue dans (7.3) :

$$d\ddot{\vec{L}} + 2d\ddot{\vec{L}} + \left(\ddot{d} + \frac{\mu d}{r^3}\right)\vec{L} = \mu\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{S^3}\right)\vec{S} \quad (7.4)$$

En multipliant scalairement cette équation vectorielle par $\vec{L} \wedge \dot{\vec{L}}$, on élimine \dot{d} et \ddot{d} . L'équation scalaire obtenue peut alors s'écrire sous la forme :

$$d = A/r^3 + B \quad \text{avec} \quad A = \mu \frac{\det(\vec{L}, \dot{\vec{L}}, \vec{S})}{\det(\vec{L}, \dot{\vec{L}}, \ddot{\vec{L}})} \quad \text{et} \quad B = -A/S^3 \quad (7.5)$$

Cette équation est valable que si $\det(\vec{L}, \dot{\vec{L}}, \ddot{\vec{L}})$ est non nul. Le déterminant est nul si l'astre a une orbite coplanaire à celle de la Terre. Dans ce cas, chaque observation ne donne qu'une donnée numérique (la longitude de l'astre) et il faut ainsi 4 observations pour obtenir les 4 paramètres qui déterminent l'orbite dans l'écliptique (par exemple : $(a, e, \omega, \lambda_0)$). Plus généralement, un astre dont le mouvement est proche de l'écliptique aura son orbite mal déterminée si on se contente de 3 observations.

L'équation (7.1) donne :

$$r^2 = S^2 + d^2 - 2\vec{L} \cdot \vec{S} \quad (7.6)$$

Avec (7.5), on obtient une équation du degré 8 en r .

Il est facile de voir que $r = S$ est une racine réelle (et donc $d = 0$). On rejette cette racine. On pourrait montrer qu'il y a 3 racines réelles positives, une racine réelle négative, les 4 autres étant complexes. Il reste donc 2 racines possibles pour notre problème. On les détermine numériquement (par exemple par dichotomie). Des critères de vraisemblances peuvent permettre de choisir entre les 2 racines. Par exemple, si les 2 racines encadrent $r = S$, la direction de \vec{L} permet de choisir. Sinon, il faut utiliser une (ou des) observations supplémentaires.

Ayant r , l'équation (7.5) donne d . On obtient \dot{d} en éliminant d et \ddot{d} de (7.4), c'est à dire en multipliant scalairement cette équation par $\vec{L} \wedge \dot{\vec{L}}$:

$$-2\dot{d} \det(\vec{L}, \dot{\vec{L}}, \ddot{\vec{L}}) = \mu \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{S^3} \right) \det(\vec{L}, \ddot{\vec{L}}, \vec{S}) \quad (7.7)$$

On peut enfin avoir \vec{r} et $\dot{\vec{r}}$ par (7.1) et (7.2).

7.2 Calcul des éléments d'orbites

Dans cette section, on ne traitera que le cas elliptique. Ainsi au lieu de la tranformation inverse de (5.4) :

$$T_{\mu,t}^{-1} : (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \rightarrow (a, e, i, \Omega, \varpi, \lambda_0)$$

, on précise ici celle qui lui est proche :

$$T_{\mu,t}^c{}^{-1} : (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \rightarrow (a, k, h, q_x, p_x, \lambda_0)$$

A partir de $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ on calcule

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (7.8)$$

On a le demi-grand axe a par l'énergie

$$\frac{\mu}{2a} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r} \quad (7.9)$$

, puis le moment cinétique

$$\frac{\vec{G}}{G} = \begin{vmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \vec{G} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \quad (7.10)$$

Par la figure de la section 5.1, on déduit que $\cos i = k_z$ et

$$\cos \frac{i}{2} = \sqrt{\frac{1 + k_z}{2}} \quad (7.11)$$

Par la même figure et en utilisant que

$$\begin{aligned} \sin i \cos(\Omega - \frac{\pi}{2}) &= k_x \\ \sin i \sin(\Omega - \frac{\pi}{2}) &= k_y \end{aligned}$$

on obtient

$$q_x = \frac{-k_y}{2 \cos \frac{i}{2}} \quad \text{et} \quad p_x = \frac{k_x}{2 \cos \frac{i}{2}} \quad (7.12)$$

On pourrait trouver $\begin{vmatrix} X^c \\ Y^c \end{vmatrix}$ en inversant la partie 2×2 de (5.32) mais cela ne serait

valable que pour $i < 90^\circ$. On préfère donc inverser tout (5.32) :

$$\begin{pmatrix} X^c \\ Y^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - p_x^2 & 2p_x q_x & -2p_x \chi \\ 2p_x q_x & 1 - 2q_x^2 & 2q_x \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

De même pour les vitesses :

$$\begin{pmatrix} \dot{X}^c \\ \dot{Y}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - p_x^2 & 2p_x q_x & -2p_x \chi \\ 2p_x q_x & 1 - 2q_x^2 & 2q_x \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

Calculons maintenant les coordonnées de \vec{e} dans le repère R^c (on rappelle qu'il est déduit de R par une rotation d'un angle $-\varpi$ autour du troisième axe, voir section 5.4) :

$$\vec{e} = \begin{vmatrix} \dot{X}^c & 0 \\ \dot{Y}^c & 0 \\ 0 & G/\mu \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X^c/r \\ Y^c/r \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ainsi on a

$$\begin{cases} k = G\dot{Y}^c/\mu - X^c/r \\ h = -G\dot{X}^c/\mu - Y^c/r \end{cases} \quad (7.15)$$

Puis (5.25) et (5.29) donnent le système d'équation linéaire d'inconnues $\cos F$ et $\sin F$:

$$\begin{cases} (1 - \psi h^2) \cos F + \psi k h \sin F = X^c/a + k \\ \psi k h \cos F + (1 - \psi k^2) \sin F = Y^c/a + h \end{cases} \quad (7.16)$$

de déterminant

$$D = 1 - \psi(h^2 + k^2) \quad (7.17)$$

que l'on résoud pour avoir $(\cos F, \sin F)$ puis F . Enfin (5.25) donne λ .

La page suivante est un programme écrit en scilab qui exécute la tranformation décrite dans cette section. On rappelle qu'elle ne peut être utilisée que pour des mouvements elliptiques.

```

function [elem]=pvtoele(pv,rmu)
ray=sqrt(pv(1)*pv(1)+pv(2)*pv(2)+pv(3)*pv(3));
v2=pv(4)*pv(4)+pv(5)*pv(5)+pv(6)*pv(6);
dga=rmu*ray/(2.*rmu-ray*v2);
gx=pv(2)*pv(6)-pv(3)*pv(5);
gy=pv(3)*pv(4)-pv(1)*pv(6);
gz=pv(1)*pv(5)-pv(2)*pv(4);
gg=sqrt(gx*gx+gy*gy+gz*gz);
cis2=sqrt((1.+gz/gg)/2.);
qx=-gy/(2.*gg*cis2);
px= gx/(2.*gg*cis2);
rtp=1.-2.*px*px;
rtq=1.-2.*qx*qx;
rdg=2.*px*qx;
x1 =rtp*pv(1)+rdg*pv(2)-2.*px*cis2*pv(3);
y1 =rdg*pv(1)+rtq*pv(2)+2.*qx*cis2*pv(3);
vx1=rtp*pv(4)+rdg*pv(5)-2.*px*cis2*pv(6);
vy1=rdg*pv(4)+rtq*pv(5)+2.*qx*cis2*pv(6);
rk= gg*vy1/rmu-x1/ray;
rh=-gg*vx1/rmu-y1/ray;
psi=1./(1.+sqrt(1.-rk*rk-rh*rh));
ach=1.-psi*rh*rh;
adg=psi*rh*rk;
ack=1.-psi*rk*rk;
dete=ach*ack-adg*adg;
sm1=x1/dga+rk;
sm2=y1/dga+rh;
cf=(sm1*ack-sm2*adg)/dete;
sf=(ach*sm2-adg*sm1)/dete;
fle=atan(sf,cf);
rl=fle-rk*sf+rh*cf;
elem=[dga rl rk rh qx px];
endfunction

```

Chapitre 8

Positions d'équilibre

dans le problème des 3-corps
+ N corps

Chapitre 9

Représentation des mouvements : fonctions trigonométriques

Somme de Fourier

FFT

analyse fine en fréquence

Chapitre 10

Représentation des mouvements : autres fonctions

polynômes de Tchebychev

polynômes mixtes